

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРИЛИВОВ ИЗЭНТРОПИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВА

Ю. П. Коровяковский

В настоящей работе продолжено исследование нелинейных приливных явлений в оболочке спутника в системе звезд-карликов, начатое в [1], для более общего случая — изэнтропических движений вещества. На основе численного интегрирования системы нелинейных уравнений теории динамических приливов исследуются условия возникновения потока вещества от спутника к главной звезде.

This paper continues the investigation of nonlinear tidal phenomena in the envelope of a satellite in a dwarf-star system started in [1] for a more general case: isentropic motions of matter. Conditions for creation of a stream of matter from the satellite to the main star are investigated on the basis of numerical integration of a set of nonlinear equations of the theory of dynamic tides.

Основные уравнения

Рассмотрим приливные явления во внешних слоях спутника, которые имеют пренебрежимо малую массу в сравнении с массой спутника. Спутник и главная звезда, по условиям нашей задачи, вращаются вокруг центра масс по круговым орбитам, а диаметр главной звезды настолько мал, что ее можно рассматривать как возмущающую материальную точку (в системах звезд-карликов типа U Gem горячая звезда является, вероятно, или белым карликом, или еще более плотной звездой [2, 3]). Примем, что ось вращения спутника перпендикулярна орбитальной плоскости, а величина угловой скорости вращения $\omega_{вп}$ связана с кеплеровой угловой скоростью ω_0 посредством соотношения

$$\omega_{вп} = (1 + f) \omega_0, \quad (1)$$

где f — параметр несинхронности.

Как и в [1], будем считать, что оболочка спутника состоит из вязкой сжимаемой жидкости, в которой существует сильно развитая турбулентность ($Re = 10^{14} - 10^{15}$).

Используя сферическую систему координат, жестко связанную со спутником и с началом координат в его центре, запишем уравнения движения и неразрывности в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt} - \frac{V^2 + W^2}{r} - 2W\omega_0(1+f)\sin\theta &= \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 U + \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{2U}{r} - \frac{2V \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \right), \\ \frac{dV}{dt} + \frac{UV - W^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} - 2W\omega_0(1+f)\cos\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 V + \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{V}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \\ \frac{dW}{dt} + \frac{W(U + V \operatorname{ctg} \theta)}{r} + 2\omega_0(1+f)(V \cos \theta - U \sin \theta) &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \varphi} - \right. \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big) + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 W + \frac{1}{3r \sin \theta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W}{r^2 \sin^2 \theta} \right), & \\ & \frac{d\rho}{dt} = -\rho \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right]$, оператор $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ и $\tilde{\Omega} = \Omega + V' + R$ (Ω — гравитационный потенциал спутника, V' — возмущающий потенциал, R — потенциал центробежных и кориолисовых сил).

Легко показать, что в введенной системе координат

$$R = -r R_1 \omega_0^2 \sin \theta \cos(f\omega_0 t + \varphi) + \frac{r^2}{2} \omega_0^2 (1+f)^2 \sin^2 \theta, \quad (3)$$

где R_1 — расстояние от начала координат до центра масс системы.

Следствие малости массы внешних слоев спутника, в которых в настоящей работе рассматриваются приливные явления, для Ω с большей точностью выполняется соотношение

$$\Omega = (GM_{\text{сн}})/r. \quad (4)$$

Как и в работах [4, 5], разлагая возмущающий потенциал V' по сферическим функциям, получим для V' выражение

$$V' = \frac{GM_{\text{гз}}}{D^3} r^2 P_2(\cos \gamma), \quad (5)$$

где D — расстояние между центрами компонентов, $P_2(\cos \gamma)$ — полином Лежандра, γ — угол между радиусом-вектором \vec{r} и линией, соединяющей центры компонентов.

Предположение об изэнтропичности движения дает нам следующую зависимость давления вещества p от его плотности ρ :

$$p = A \rho^\gamma, \quad (6)$$

где A — энтропийная константа, γ — отношение удельных теплоемкостей (в нашей задаче $\gamma = 5/3$). По аналогии с [6] будем искать решение (2) в виде

$$\left. \begin{aligned} U &= u(r, t) \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^j y_j^i(\theta, \varphi), \\ V &= v(r, t) \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^j y_j^i(\theta, \varphi), \\ W &= \frac{v(r, t)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^j y_j^i(\theta, \varphi), \\ \rho &= k(r, t) \left[\sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^j y_j^i(\theta, \varphi) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(u , v и k — «представители» скорости и плотности вещества), считая, что ожидаемые деформации являются сфероидальными. Штрих у знака суммы означает, что при суммировании учитываются лишь те сферические функции, которые симметричны относительно преобразования $\theta_1 = \pi - \theta$, т. е. для них справедливо равенство

$$y_j^i(\theta, \varphi) = y_j^i(\pi - \theta, \varphi), \quad (8)$$

так как при сделанных предположениях плоскость орбиты является также и плоскостью симметрии ожидаемого решения. Представление решения в виде (7) физически эквивалентно предположению о том, что в разложении функции U (аналогично U , W и ρ) в ряд по сферическим функциям коэффициенты разложения $u_j^i(r, t)$, $[v_j^i(r, t)$, $w_j^i(r, t)$ и $\rho_j^i]$ приближенно равны друг другу.

Подставив (7) в (2), умножив первое и второе уравнения системы (2) на $\sum \sum y_j^i$, $\frac{\partial}{\partial \theta} \sum \sum y_j^i$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum \sum y_j^i$ соответственно и проинтегрировав получившиеся уравнения по сфере, получим систему уравнений для «представителей» u , v и k :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -a_1 u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{a_2}{r} (uv - v^2) + a_3 v \omega_0 (1 + f) + a_4 \frac{GM_{\text{сп}}}{r^2} + a_5 r (1 + f)^2 \omega_0^2 + \\ & + a_6 R_1 \omega_0^2 \cos f \omega_0 t + \frac{2GM_{\text{сп}} r}{D^3} (a_7 + a_8 \cos 2f \omega_0 t) - \frac{A\gamma}{\gamma - 1} a_9 \frac{\partial k}{\partial r} + \\ & + a_{10} \nu_k \left(\frac{7v}{3r^2} - \frac{1}{3r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{8}{3} a_{11} \nu_k \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = & -b_1 u \frac{\partial v}{\partial r} - b_2 \frac{v^2}{r} - b_3 \frac{uv}{r} + b_4 v (1 + f) \omega_0 + b_5 r \omega_0^2 (1 + f)^2 + \\ & + b_6 R_1 \omega_0^2 \cos f \omega_0 t + \frac{GM_{\text{сп}} r}{D^3} (b_7 + b_8 \cos 2f \omega_0 t) - \frac{A\gamma}{\gamma - 1} b_9 \frac{k}{r} + \\ & + (b_{10} + b_{11}) \nu_k \left(\frac{8}{3} \frac{u}{r^2} - \frac{8}{3} \frac{v}{r^2} + \frac{1}{3r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) - \frac{16}{3} \nu_k b_{11} \frac{v}{r^2}, \\ \frac{\partial k}{\partial t} = & -c_1 u \frac{\partial k}{\partial r} - c_2 k \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) - \frac{c_3 \nu_k}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При выводе уравнений системы (9) было использовано уравнение, определяющее сферические функции $y_j^i(\theta, \varphi)$:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 y_j^i}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial y_j^i}{\partial \theta} \right) + j(j+1) y_j^i = 0. \quad (10)$$

Здесь мы откажемся от выписывания довольно громоздких выражений для коэффициентов a_i , b_i и c_i (выражения для них см. в [1] с той лишь разницей, что при суммировании необходимо учесть условие (8)) и приведем их численные значения для $N = 2$:

i	a_i	b_i	c_i
1	2.237	2.094	3.933
2	3.034	-0.8231	2.622
3	0	2.094	5.422
4	0.2542	0	—
5	0.1356	-0.1062	—
6	0.08475	-0.04425	—
7	-0.02542	-0.1593	—
8	0.1525	0.1593	—
9	1.0000	1.000	—
10	4.1356	0.04425	—
11	1.000	0.9557	—

В уравнения (9) входит ν_k — коэффициент кинематической вязкости, который связан с коэффициентом динамической вязкости μ соотношением $\nu_k = \mu/\rho$. Поскольку для газа, движущегося со скоростью, близкой к звуковой, не существует теории турбулентности и нет выражения для коэффициента кинематической турбулентной вязкости через известные физические характеристики среды, то величина ν считалась параметром задачи, которому придавались значения $\nu_k = 10^{13} - 10^{14}$ см²·сек.⁻¹. Для численного интегрирования системы (9) удобно ввести безразмерные единицы длины $x = r/r_0$, времени $\tau = \omega_0 t$, скорости и плотности $u' = u/r_0 \omega_0$, $v' = v/r_0 \omega_0$, $k' = k/\bar{\rho}^{\gamma-1}$, где $\bar{\rho} = 3M_{\text{сп}}/4\pi r_0^3$.

Начальные условия

При решении системы (9) рассмотрим два типа начальных условий: а) в момент времени $\tau=0$ вещество оболочки находится в состоянии покоя (относительно системы координат, связанной со спутником), т. е. $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$, и в оболочке спутника выполняется условие гидростатического равновесия; б) в распределении давления по радиусу учтены силы, вызванные осевым и орбитальным вращением спутника и притяжением главной звезды.

Для нахождения величины $p(x, 0)$ в первом случае примем, что строение внешних слоев спутника подчиняется политропическому закону, т. е.

$$p(x, 0) = p_0 = K_n \rho_0^{1+1/n}, \quad (12)$$

где n — индекс политропии (для нашей задачи возьмем $n=1.5$), а K_n , согласно [7], равно

$$K_n = N_n G M_{\text{сп}}^{(n-1)/n} r_{\text{сп}}^{(3-n)/n}, \quad (13)$$

здесь G — гравитационная константа, $M_{\text{сп}}$ и $r_{\text{сп}}$ — масса и радиус спутника соответственно, $N_n = 0.42422$ для $n=1.5$. Используя предположение о выполнении в оболочке условия гидростатического равновесия, получим

$$\frac{d\rho_0}{dr} = -\frac{GM_{\text{сп}}}{r^2} \rho_0. \quad (14)$$

Вследствие малости массы оболочки в сравнении с массой спутника можно считать, что во всей оболочке $M_{\text{сп}} = \text{const}$. Подставляя (12) в (14) и интегрируя (при $M_{\text{сп}} = \text{const}$), получим

$$\rho_0(r) = [(GM_{\text{сп}}/K_n r_{\text{сп}}) \cdot (\gamma' - 1)/\gamma]^{1/(\gamma'-1)} [(r_0 - r)/r]^{1/(\gamma'-1)}, \quad \text{где } \gamma' = 1 + 1/n. \quad (15)$$

Подставляя численные значения для $n=1.5$ и вводя безразмерные величины $x = r/r_0$, $\rho'(x) = \rho_0(x)/\bar{\rho}$, будем иметь

$$\rho'(x) = 0.623 [(1-x)/x]^{3/2}, \quad (16)$$

из соотношения (7)

$$k(x, 0) = 0.623 (1-x)/x. \quad (17)$$

При нахождении распределения $p(x, 0)$ во втором случае воспользуемся первым уравнением системы (9) и положим в нем $t=0$;

$$u = v = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (18)$$

Интегрируя получившееся уравнение по x в пределах от x до 1 (при этом величина k_0 меняется от $k_0(x)$ до 0), имеем:

$$k_0(x) = (a_4/a_5) [(1-x)/x] + (a_4 + a_6)/2a_5 (x^2 - 1) + (a_5/a_5) (x - 1). \quad (19)$$

Для численного интегрирования системы (6) отрезок $[x_0, x_*$] разбивался на M равных частей точками $x_j = x_0 + jhx$ и в каждом из узлов x_j ($j = -1, 0, \dots, M+1$) производные по x заменялись конечно-разностными соотношениями. Полученная система $3 \times (M+2)$ обыкновенных дифференциальных уравнений решалась методом Рунге—Кутты. При решении M принималось равным 16. Для решения системы $3 \times (M+2)$ уравнений необходимо задание граничных значений u' , v' и k' , которые в общем случае неизвестны. Для их задания были испытаны 2 способа: а) значения функций, которые находились в процессе интегрирования во внутренних узлах x_j ($j = -1, 0, \dots, M+1$), экстраполировались на каждом шаге по времени на внешние узлы x_j ($j = -2, M+2$) (непрерывное изменение величин скорости при переходе из ядра в оболочку); б) на внутренней границе (при $j = -2$) $k'(x_0, \tau) = kc = \text{const}$, $u(x_0, \tau) = v(x_0, \tau) = 0$ (приток вещества из ядра отсутствует), а на внешней граничные условия находились, как и при первом способе.

Результаты интегрирования основной системы уравнений

Изменение величин по времени и распределение их по x_j приведено на рис. 1 и 2. В расширении оболочки существенную роль играет градиент давления; там, где он со временем становится круче, скорость растет быстрее (рис. 2, а).

Следует отметить, что используемые здесь граничные условия (в частности, экстраполяция плотности) предполагают, что строение более глубоких, внутренних слоев спутника описывается тем же законом распределения плотности, что и в соотношении (17). Однако справедливость такого допущения далеко не очевидна. Физически использование этих граничных условий эквивалентно предположению о высокой степени концентрации вещества к центру спутника. Так как нам неизвестно истинное строение внутренних частей спутника, важно рассмотреть другую крайнюю возможность, когда концентрация вещества к центру спутника незначительна. Это предположение дает нам нижнее граничное условие для плотности вещества в виде

$$k(x_*, \tau) = k_0 = \text{const}, \quad (20)$$

т. е. мы предполагаем, что перетекающее через границу «ядра» и «оболочки» вещество «черпается» из полости, заполненной веществом с постоянной плотностью. С такими граничными условиями система уравнений (9) интегрировалась для следующих значений параметров:

$$r_0 = 0.45; f = 0.5, 1, 2; v_k = 10^{13}.$$

Из рис. 3 видно, что при новых граничных условиях для k решение системы (9) довольно быстро выходит на квазистационарный режим, который обеспечивает потерю массы спутником. Как следует из рис. 3, в, амплитуда колебаний плотности k в более глубоких слоях оболочки существенно меньше, чем во внешних слоях. Период колебаний величин скорости (u , v) и плотности (k) совпадает с периодом прохождения возмущающей звезды над узлами сетки, в которых мы следим за изменением поля скоростей. При $v_k = 10^{13} \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, уже после второго прохождения возмущающей звезды над узлами сетки, приливной горб (максимальное значение радиальной скорости u) точно «следит» за нею (случай малой вязкости).

Из рис. 3 видно также, что значение скорости v (равно как и u) совершает периодические колебания вокруг некоторого ненулевого значения

($\bar{v}=0.8$). Это легко понять, если учесть, что используемая система координат xuz жестко связана с «ядром» спутника и вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega_{вп}$ в два раза большей, чем ω_0 (при $f=1$), в то время как приливной горб «следит» за движением главной звезды. Получаемое

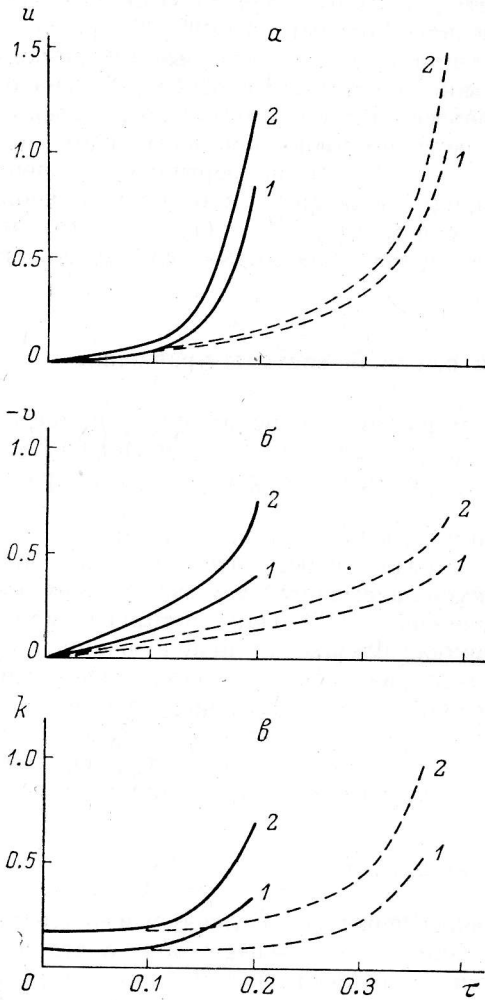


Рис. 1. Изменение величин u (а), v (б) и k (в) во времени в точках x_j .
1 — $j=10$; 2 — $j=2$; сплошные линии при $r_0=0.3$, штриховые линии при $r_0=0.45$.

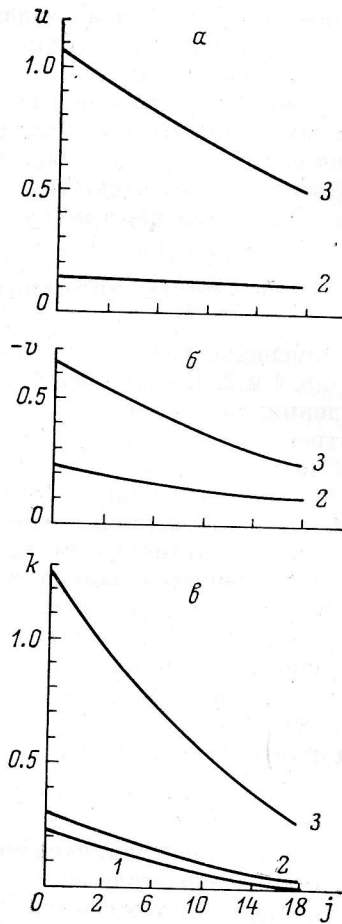


Рис. 2. Распределение величин u (а), v (б) и k (в) по x_j в различные моменты времени.
1 — $\tau=0$; 2 — $\tau=0.2$; 3 — $\tau=0.4$.

при этом среднее значение скорости движения вещества относительно системы координат xuz

$$v = \frac{\bar{r}(\omega_{вп} - \omega_0)}{r_0\omega_0} = f\bar{x}$$

совпадает со значением v из рис. 3 ($f=1, \bar{x}=0.8$). Ненулевое среднее значение радиальной скорости и обусловлено нелинейностью уравнений (присутствием члена v^2/x в правой части 2-го уравнения системы (7)).

Из уравнений (7) видно, что при использовании начальных условий в виде (17) в последующие моменты времени в правых частях первого

и второго уравнений системы (7) «включаются» члены, описывающие, кроме приливных возмущений, еще и осевое и орбитальное вращение спутника. Очевидно, что для выхода решения на квазистационарный режим в этом случае необходимо большее количество машинного времени, чем при начальном распределении (19), в котором учтено и осевое и орбитальное вращение спутника.

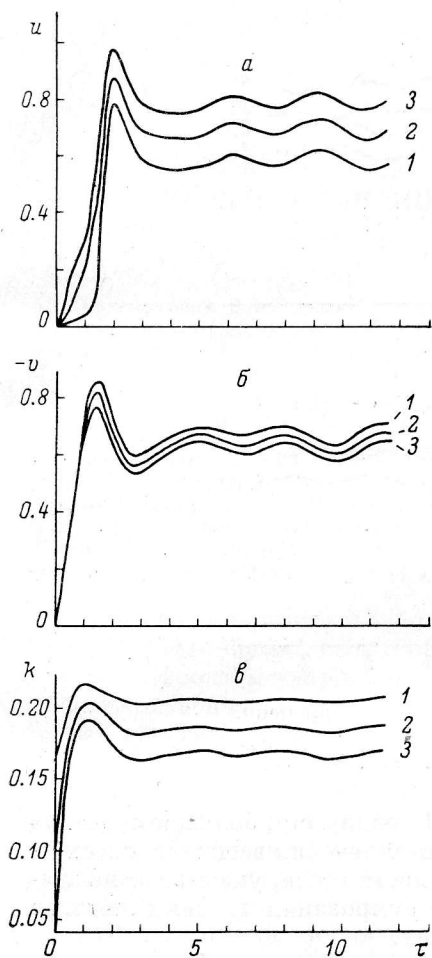


Рис. 3. Изменение величин u (а), v (б) и k (в) во времени в различных узлах сетки.

1 — $j=2$; 2 — $j=8$; 3 — $j=14$.

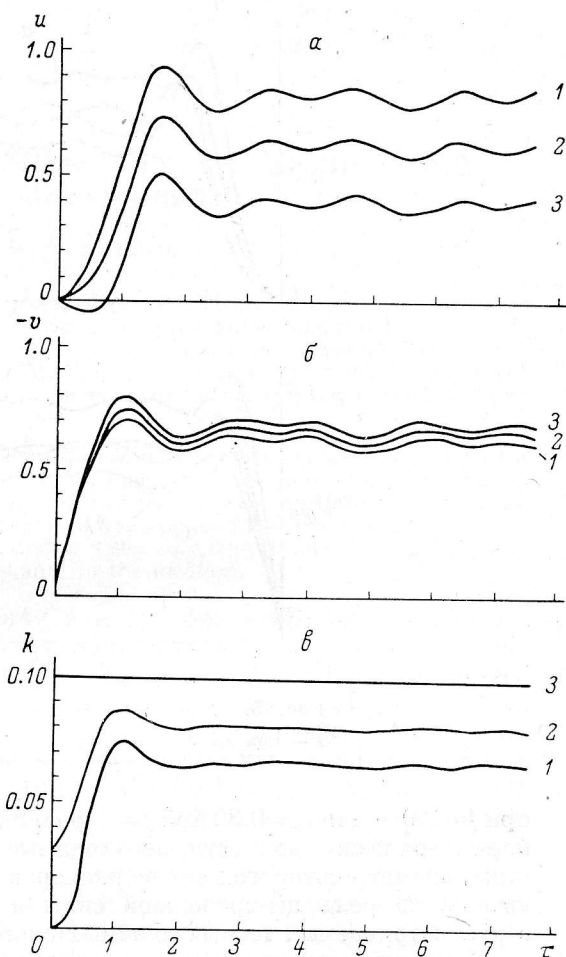


Рис. 4. Изменение величин u (а), v (б) и k (в) во времени в узлах сетки.

1 — $j=18$; 2 — $j=8$; 3 — $j=-2$.

При таких начальных условиях для $k(x)$ интегрирование системы производилось для следующих значений параметров: $r_0=0.35, 0.4, 0.45$; $f=1, 1.5, 2, 2.5, 3$; $v_k=10^{13} \text{ см}^2 \cdot \text{сек.}^{-1}$.

Сравнение решений системы (7), полученных при начальных условиях (17) и (19), показывает, что после выхода на квазистационарный режим оба решения системы практически совпадают (рис. 4). Совпадение установившегося решения для двух различных распределений k и по x свидетельствует о том, что рассматриваемая модель быстро «забывает» о начальных условиях; установившееся решение слабо зависит от них и определяется лишь значениями параметров задачи (f, r_0).

Вывод о существовании стационарного истечения вещества из спутника — в случае незаполнения им внутренней полости Роша — может стать общим лишь в том случае, если такое истечение вещества имеет место для достаточно широкого интервала параметров задачи.

Результаты вычислений показали, что квазистационарный режим реализуется для значений радиуса спутника $r_0=0.40$ при $f=1.5$, для $r_0=0.35$

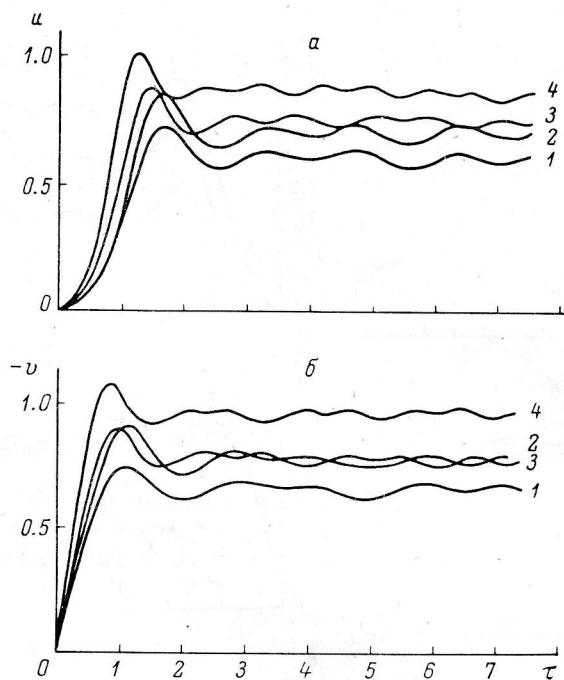


Рис. 5. Изменение величин u и v во времени.

1 — при $r_0=0.45$, $f=2.0$; 2 — при $r_0=0.4$, $f=2.0$; 3 — при $r_0=0.4$, $f=2.5$; 4 — при $r_0=0.35$, $f=3.0$.

при $f=2.0$ и для $r_0=0.30$ при $f=3$ (рис. 5). По-видимому, большие значения параметра несинхронности, необходимые для истечения вещества из спутника, диаметр которого меньше размеров полости Роша, указывают на значительную роль центробежной силы в формировании газовых потоков в рассматриваемых тесных двойных системах.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность В. Г. Горбачкову за ценные советы в ходе выполнения этой работы.

Литература

1. Ю. П. Коровяковский, Астрофиз. исслед. (Изв. САО), 4, 115, 1972.
2. В. Г. Горбачкий. В кн.: Эруптивные звезды, гл. 2. 63. М., «Наука», 1970.
3. Р. Крафт. Эруптивные переменные как двойные звезды. М., «Мир», 1965.
4. J. P. Zahn, Ann. Astrophys. 29, 313, 1966; 29, 489, 1966; 29, 565, 1966.
5. В. Ф. Крат. Фигуры равновесия небесных тел. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
6. Z. Koral. Astrophys. Space Sci., 1, 2, 179, 1968; 1, 3, 284, 1968.
7. С. Чандрасекар. Введение в учение о строении звезд. М., ИЛ, 1950.