

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОПТИКИ. II

### МЕТОД ГАРТМАННА

*Э. А. Витриченко, Ф. К. Катагаров, В. Г. Липовецкая*

Разработана методика исследования параболических зеркал из центра кривизны методом Гартманна при помощи ЭВМ. Составлена программа автоматической обработки снимков Гартманна на ЭВМ «М-222» на языке «АЛГОЛ-60».

Программа позволяет обрабатывать как зафокальные, так и предфокальные снимки Гартманна.

Computer assisted methods of investigation of parabolic mirrors by Hartmann's method in the illuminating beam coming from the center of curvature is developed. A program of automatic processing of Hartmann pictures using an «M-222» computer is written in «ALGOL-60».

The program allows to treat both postfocal and prefocal Hartmann pictures.

При изготовлении и аттестации астрономической оптики возникает проблема оперативного контроля качества ее поверхности. В классическом применении метод Гартманна недостаточен ввиду большого количества вычислений с большим числом данных. Эту трудность можно обойти только путем применения ЭВМ. Здесь рассматривается программа для обработки снимков Гартманна на ЭВМ «М-222». Программа составлена на языке «АЛГОЛ-60».

Оптическая схема, используемая для получения снимков Гартманна, показана на рис. 1. Вплотную к поверхности параболического астрономи-

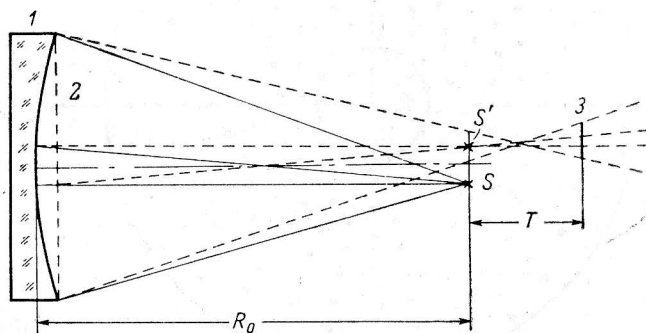


Рис. 1. Оптическая схема установки для исследования параболического астрономического зеркала.

ческого зеркала (1) устанавливается диафрагма Гартманна (2), представляющая собой диск с набором круглых отверстий. Зеркало с диафрагмой освещается источником  $S$  из точки вблизи центра кривизны параксиальной зоны. Параксиальная зона зеркала создает изображение источника в точке  $S'$ , расположенной вблизи  $S$ . Перед центром кривизны на расстоя-

нии  $T_1$ , а затем за центром кривизны на расстоянии  $T_2$  поочередно устанавливаются фотопластинки, на которых регистрируется отраженный от зеркала пучок света (3). Первый из снимков называется предфокальным, а второй — зафокальным снимком Гартманна. На гартманнограммах получается уменьшенное изображение диафрагмы Гартманна, деформированное из-за того, что астрономическое зеркало имеет параболическую поверхность, а не сферическую, и из-за ошибок поверхности зеркала.

Пусть поверхность астрономического зеркала имеет идеальную форму параболоида вращения. Зная расположение отверстий на диафрагме, можно вычислить теоретическое положение точек на гартманнограмме. Обозначим координаты этих точек  $x_{ид}$  и  $y_{ид}$ . Реально измеренные координаты обозначим  $x$  и  $y$ . Основными величинами, вычисляемыми по методу Гартманна, являются величины уклонений

$$\delta x = x - x_{ид} \text{ и } \delta y = y - y_{ид}$$

координат центров точек для реального зеркала от координат центров точек, вычисленных для идеального зеркала.

Величины уклонений  $\delta x$  и  $\delta y$  используются для анализа качества поверхности зеркала. По ним определяются следующие характеристики: а) распределение световой энергии в изображении точки, б) кривая астигматизма, в) топографическая карта зеркала.

### Диафрагма Гартманна

К диафрагме Гартманна предъявляется ряд требований.<sup>2</sup>

1. Для удобства вычисления координат центров отверстий структура расположения отверстий должна быть простой.

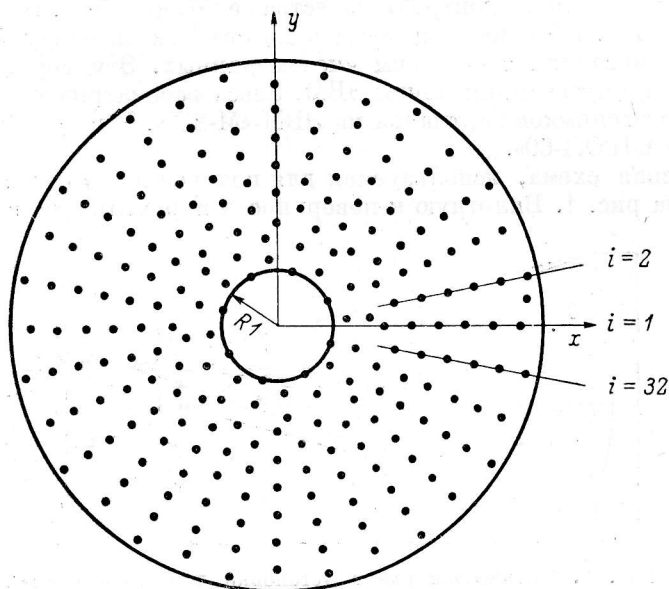


Рис. 2. Схема расположения отверстий на диафрагме Гартманна, для которой составлена программа «Гартманн».

2. Отверстия должны равномерно покрывать поверхность зеркала. В этом смысле предпочтительно использовать квадратную структуру расположения отверстий.

3. Выбор расстояния  $B$  между отверстиями критически зависит от качества зеркала: расстояние между отверстиями должно быть существенно меньше характерных размеров дефектов поверхности зеркала. Это условие наиболее трудно выполнимо.

Для диафрагмы, которая здесь рассматривается, с расположением отверстий, показанным на рис. 2, формулы для вычисления координат центров отверстий будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_{\text{диафр}} &= R \cos \Phi, \\ y_{\text{диафр}} &= R \sin \Phi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R$  и  $\Phi$  — полярные координаты точек, вычисляемые для этого случая по эмпирическим формулам (2):

$$\begin{aligned} R &= R_1 + B \{4k - 3 + (-1)^i \operatorname{sign}(k \div 3) - (-1)^{(i+1) \div 2} [1 - \operatorname{sign}(k \div 3)]\} / 4, \\ \Phi &= \Phi_0 \{i - 1 - [\operatorname{sign}(k \div 3) - 1]^i / 2\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $i$  — номер радиуса, которому принадлежит точка,  $k$  — номер точки вдоль радиуса (нумерация точек начинается от центра, считается, что центральные точки с номерами  $k=1$  и  $k=2$  принадлежат двум соседним радиусам, так что каждый радиус будет содержать по 8 точек),  $\Phi_0$  — угол между соседними радиусами,  $(\div)$  — обозначение операции деления на цело, принятое в программировании на языке «АЛГОЛ-60», а именно:

$$a \div b = E(a/b).$$

### Вычисление координат точек на фотопластинке

Пусть  $R, \Phi$  — координаты произвольной точки  $M$  диафрагмы Гартманна. В общем случае центр диафрагмы  $O$  не совпадает с центром зеркала  $O'$  (рис. 3). В системе координат, привязанной к центру зеркала, полярные координаты центра диафрагмы  $O$  будут  $q$  и  $\varphi$ , а полярные координаты точки  $M$  диафрагмы будут  $R'$  и  $\Phi'$ . Аналогично [1] рассмотрим, как связаны координаты  $R', \Phi'$  и  $R, \Phi$  точки  $M$ . Так как  $q$  — малая величина по сравнению с радиусом точки ( $q$  — точность центрировки диафрагмы), то

$$R' = R + \Delta r = R + q \cos(\Phi - \varphi).$$

Введем обозначения:

$$v = q \cos \varphi, \quad w = q \sin \varphi,$$

тогда

$$\begin{aligned} R' &= R + v \cos \Phi + w \sin \Phi, \\ \cos \Phi' &= (R \cos \Phi + v) / (R + v \cos \Phi + w \sin \Phi), \\ \sin \Phi' &= (R \sin \Phi + w) / (R + v \cos \Phi + w \sin \Phi). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, при смещении диафрагмы на  $v$  и  $w$  точке с координатами  $R$  и  $\Phi$  на диафрагме будет соответствовать точка с координатами  $R'$  и  $\Phi'$  на зеркале.

Рассмотрим теперь, чему равны координаты соответствующей точки на фотопластинке.

1. Пусть зеркало имеет идеальную сферическую поверхность. Тогда координаты точек на фотопластинке будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{\text{пл}} &= R' T \cos \Phi' / (R_0 - d), \\ y_{\text{пл}} &= R' T \sin \Phi' / (R_0 - d). \end{aligned}$$

где  $T = T_1$  для предфокального снимка,  $T = T_2$  для зафокального снимка,  $d$  — расстояние от центра зеркала до диафрагмы,  $R_0$  — радиус кривизны зеркала.

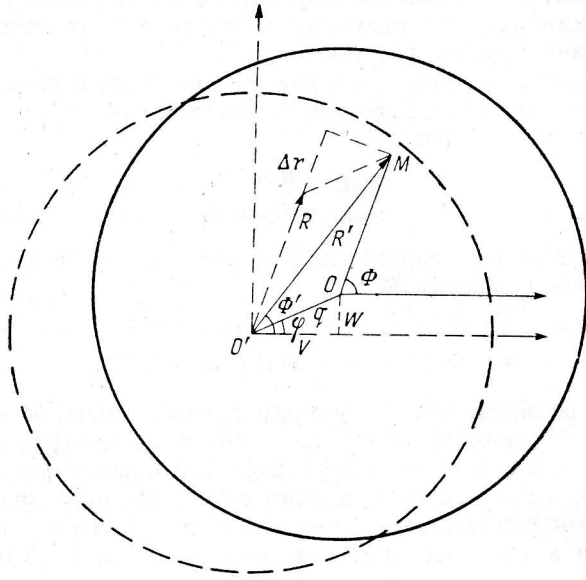


Рис. 3. К выводу формулы (3).

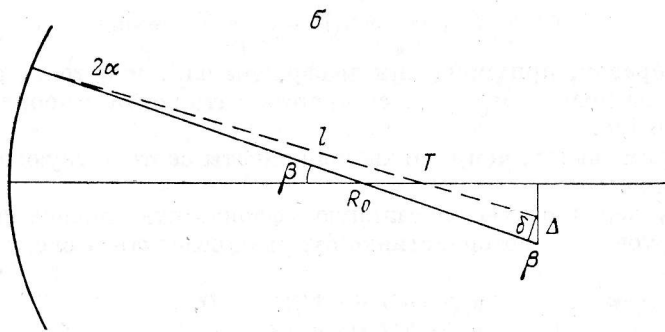
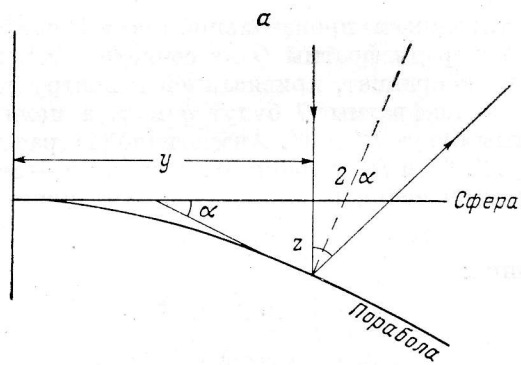


Рис. 4. К выводу формул (4), (5) и (6).

2. Поскольку зеркало не сферическое, а параболическое, необходимо ввести соответствующую поправку  $\Delta$ . Если провести сферу с радиусом, равным удвоенному фокусному расстоянию параболы, так, чтобы она касалась параболы в точке пересечения параболы с оптической осью, то отклонение параболы от сферы составит величину

$$z = -y^4/8R_0 \quad (4)$$

Обозначения понятны из рис. 4, а. Зная величину  $z$ , можно определить величину поправки  $\Delta$  для координат точек на фотопластинке. Для этого определим сначала угол между лучом, отраженным от параболы, и лучом, отраженным от сферы:

$$2\alpha = 2 \operatorname{arctg} (y^3/2R_0^3) = y^3/R_0^3. \quad (5)$$

В разложении функции  $\operatorname{arctg} (y^3/2R_0^3)$  оставлен только первый член, так как остальными можно пренебречь.

Расстояние  $l$  от точки на зеркале с координатами  $R'$ ,  $\Phi'$  до ее изображения на фотопластинке составляет  $l = R_0 \pm T/\cos \beta \approx R_0 \pm T$ . Знак «+» соответствует зафокальному снимку, знак «-» — предфокальному. После некоторых преобразований с учетом (5) получаем величину поправки, обусловленную параболическостью зеркала:

$$\Delta = (R'/R_0)^3 [R_0 + (R')^2/2R_0 \pm T]. \quad (6)$$

Заметим, что величина поправки  $\Delta$  для зафокального и предфокального снимков должна иметь разные знаки (рис. 4, б.) Для учета этого обстоятельства введем параметр  $F$ , который будет принимать значения  $\pm 1$  или  $-1$  в зависимости от вида обрабатываемого снимка. Итак, с учетом поправки  $\Delta$  координаты точек на фотопластинке относительно точки пересечения оптической оси с пластинкой

$$\begin{aligned} x_0 &= R'T \cos \Phi' / (R_0 - d) - F (R'/R_0)^3 [R_0 + (R')^2/2R_0 \pm T] \cos \Phi', \\ y_0 &= R'T \sin \Phi' / (R_0 - d) - F (R'/R_0)^3 [R_0 + (R')^2/2R_0 \pm T] \sin \Phi'. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Получаемые при измерениях на «Аскорекорде» координаты могут быть представлены в виде

$$x_{нд} = x_c + x_0 - \omega y_0, \quad y_{нд} = y_c + y_0 + \omega x_0, \quad (7a)$$

где  $x_c$ ,  $y_c$  — координаты центра гартманнограммы с центром в точке пересечения оптической оси с пластинкой,  $\omega$  — угол между осью  $x$  «Аскорекорда» и первым радиусом (рис. 5).

Окончательно формула Гартманна для координат точек на фотопластинке примет вид:

$$\begin{aligned} x_{нд} &= \{T/(R_0 - d) - F (R')^2 [R_0 + (R')^2/2R_0 + FT]/R_0^3\} [R \cos \Phi + v + \\ &\quad + \omega (R \sin \Phi + w)] + x_c, \\ y_{нд} &= \{T/(R_0 - d) - F (R')^2 [R_0 + (R')^2/2R_0 + FT]/R_0^3\} [R \sin \Phi + w - \\ &\quad - \omega (R \cos \Phi + v)] + y_c, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $R'$  определяется с помощью (3).

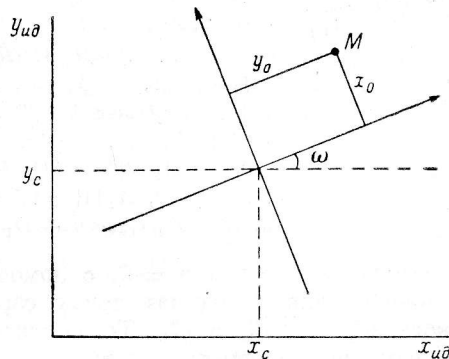


Рис. 5. К выводу формулы (7a).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} D_1 &= T/(R_0 - d) - F(R')^2 [R_0 + (R')^2/2R_0 + FT]/R_0^3, \\ D_2 &= -2FR' [R_0 + (R')^2/2R_0 + FT]/R_0^3 - F(R')^3/R_0^4, \\ D_3 &= R \cos \Phi + v + (R \sin \Phi + w) \omega, \\ D_4 &= R \sin \Phi + w - (R \cos \Phi + v) \omega. \end{aligned}$$

Будем считать, что нам неизвестны точные значения величин  $R_0$ ,  $T$  и  $x_c$ ,  $y_c$ , а также величины  $v$ ,  $w$  и  $\omega$ . Уточнение величин  $R_0$ ,  $T$  и  $x_c$ ,  $y_c$ , а также определение  $v$ ,  $w$  и  $\omega$  выполним методом наименьших квадратов. Для вывода условных уравнений продифференцируем формулу (8):

$$\begin{aligned} dx_{нд} &= A_1 [1] dR_0 + A_1 [2] dT + A_1 [3] dx_c + A_1 [4] dy_c + \\ &\quad + A_1 [5] d\omega + A_1 [6] dv + A_1 [7] dw, \\ dy_{нд} &= A_2 [1] dR_0 + A_2 [2] dT + A_2 [3] dx_c + A_2 [4] dy_c + \\ &\quad + A_2 [5] d\omega + A_2 [6] dv + A_2 [7] dw, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 [1] &= D_3 \{-T/(R_0 - d)^2 + F(R'/R_0^2)^2 [2R_0 + 2(R')^2/R_0 + 3FT]\}, \\ A_1 [2] &= D_3 [1/(R_0 - d) - (R')^2/R_0^3], \\ A_1 [3] &= 1, \quad A_1 [4] = 0, \quad A_1 [5] = D_1 (R \sin \Phi + w), \\ A_1 [6] &= D_2 D_3 \cos \Phi + D_1, \quad A_1 [7] = D_2 D_3 \sin \Phi + D_1 \omega, \\ A_2 [1] &= D_4 \{-T/(R_0 - d)^2 + F(R'/R_0^2)^2 [2R_0 + 2(R')^2/R_0 + 3FT]\}, \\ A_2 [2] &= D_4 [1/(R_0 - d) - (R')^2/R_0^3], \\ A_2 [3] &= 0, \quad A_2 [4] = 1, \quad A_2 [5] = -D_1 (R \cos \Phi + v), \\ A_2 [6] &= D_2 D_4 \cos \Phi - D_1 \omega, \quad A_2 [7] = D_2 D_4 \sin \Phi + D_1. \end{aligned}$$

Полагая  $\omega = v = w = 0$ , с помощью формулы (8) найдем нулевое приближение для координат точек гартманнограммы идеального параболического зеркала  $x_{нд}^0$  и  $y_{нд}^0$ . Тогда отклонения измеренных координат от теоретически вычисленных будут:

$$\delta x = x - x_{нд}^0, \quad \delta y = y - y_{нд}^0, \quad (10)$$

где  $x$  и  $y$  — измеренные значения координат.

Подставим найденные значения  $\delta x$  и  $\delta y$  в левые части уравнений (9). Получим систему из  $2N$  условных уравнений, которые решим методом наименьших квадратов относительно неизвестных  $dR_0$ ,  $dT$ ,  $dx_c$ ,  $dy_c$ ,  $d\omega$ ,  $dv$ ,  $dw$ ;  $N$  — общее число точек, обрабатываемых на гарманнограмме.

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} [P(\delta x A_1 [1] + \delta y A_2 [1])] &= \sum_{i=1}^7 z_i [P(A_1 [1] A_1 [i] + A_2 [1] A_2 [i])], \\ [P(\delta x A_1 [2] + \delta y A_2 [2])] &= \sum_{i=1}^7 z_i [P(A_1 [2] A_1 [i] + A_2 [2] A_2 [i])], \\ \dots \dots \dots \\ [P(\delta x A_1 [7] + \delta y A_2 [7])] &= \sum_{i=1}^7 z_i [P(A_1 [7] A_1 [i] + A_2 [7] A_2 [i])]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь используются обозначения Гаусса:  $[ab] = \sum_{k=1}^N a_k b_k$ .  $P$  — вес, приписываемый каждому условному уравнению, так как мы имеем систему неравноточных условных уравнений. В нашем случае примем

$$P = R/R_3,$$

где  $R_3$  — радиус исследуемого зеркала,  $R$  — радиус точки на зеркале.

Искомые поправки параметров обозначим через  $z_1, z_2, \dots, z_7$ , а именно:

$$z_1 = dR_0, \quad z_2 = dT, \quad z_3 = dx_c, \quad z_4 = dy_c, \quad z_5 = d\omega, \quad z_6 = dv, \quad z_7 = dw.$$

Матрицу коэффициентов нормальной системы (11) обозначим  $A[i, j]$ , столбец свободных членов —  $L[i]$ . Тогда систему (11) можно записать в виде  $Az = L$ .

Матрица  $A$  нормальной системы (11) симметрична с положительными элементами по диагонали. Решая систему (11), находим поправки параметров, вычисляем также ошибку  $\sigma$  одного уравнения на единицу веса:

$$\sigma = \sqrt{S/(2N-7)},$$

где

$$S = \{P[(\delta x)^2 + (\delta y)^2]\} - z_1 L [1] - z_2 L [2] - \dots - z_7 L [7].$$

Исходный массив данных может содержать грубые ошибки в отдельных измерениях. Это связано с промахами при измерениях, сбоями «Ас-коректора» и с существованием грубых дефектов на самом зеркале.

Очистим исходный массив измерений от грубых ошибок. Для этого исключим из дальнейшего анализа те точки, для которых выполняется условие  $\varepsilon x > 3\sigma$  или  $\varepsilon y > 3\sigma$ , где  $\varepsilon x, \varepsilon y$  — невязки соответствующих условий уравнений. После исключения грубых ошибок повторим процесс составления и решения нормальных уравнений. Вычислим новые значения поправок параметров и исправим исходные параметры:

$$\begin{aligned} R'_0 &= R_0 + dR_0, & y'_c &= y_c + dy_c, \\ T' &= T + dT, & \omega' &= \omega + d\omega, \\ x'_c &= x_c + dx_c, & v' &= v + dv, \\ & & w' &= w + dw. \end{aligned} \quad (12)$$

Пользуясь исправленными значениями параметров, вычисляем теперь уже первое приближение теоретических значений координат точек гартманнограммы  $x_{ид}^1$  и  $y_{ид}^1$ . Вновь вычисляем величины уклонений

$$\delta x = x - x_{ид}^1 \text{ и } \delta y = y - y_{ид}^1,$$

подставляем их в левые части уравнений (9) и повторяем весь цикл сначала, но уже с новыми параметрами. Цикл повторяется до тех пор, пока поправки, найденные на  $n$ -м и  $n+1$ -м шагах не совпадут с некоторой заранее заданной точностью  $\varepsilon$ , т. е. пока не выполнится условие

$$|z_i^{n+1} - z_i^n| < \varepsilon$$

для  $i = 1, 2, \dots, 7$ .

Параллельно с вычислением неизвестных  $z_i$ , найдем веса этих неизвестных  $P_{z_i}$ . Тогда средние квадратичные ошибки неизвестных будут:

$$\sigma_{z_i} = \frac{\sigma}{\sqrt{P_{z_i}}}.$$

Допустим, что процесс вычислений закончен и  $R_0, T, x_c, y_c, \omega, v, w$  — полученные уточненные параметры. Тогда результат принято записывать в виде

$$R'_0 = R_0 \pm \sigma_{R_0}, \quad T' = T \pm \sigma_T, \quad x'_c = x_c \pm \sigma_{x_c}, \quad \dots, \quad w' = w \pm \sigma_w.$$

По формуле (8) вычисляем теоретические значения координат точек гартманнограммы  $x_{ид}, y_{ид}$ . Сравнивая их с измеренными координатами, находим отклонения  $\delta x$  и  $\delta y$ , которые в центре кривизны будут равны:

$$Dx = \delta x R_0 / (R_0 \pm T), \quad Dy = \delta y R_0 / (R_0 \pm T).$$

С помощью этих величин анализируется качество зеркала.

## Анализ качества зеркала

1. Построение кривой распределения света в изображении. Вычисляем величину

$$\text{Int}(h) = \sum_{i=1}^n R_i \left/ \sum_{i=1}^N R_i \right.,$$

где  $N$  — общее число точек гартманнограммы,  $n$  — число точек, для которых выполнено условие  $\sqrt{(Dx)^2 + (Dy)^2} \leq h$ ,  $R_i$  — радиус точки на зеркале.

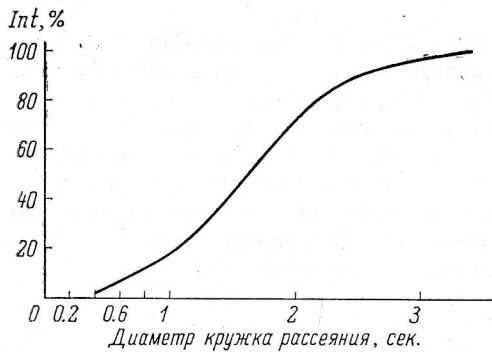


Рис. 6. Пример кривой распределения света в изображении точки.

На рис. 6 приведен пример кривой распределения света, полученной при исследовании зеркала диаметром 600 см.

2. Построение кривой астигматизма. Используем соотношение

$$r = R'T/(R_0 - d) - F(R'/R_0)^3 [R_0 + (R')^2/2R_0 \pm T],$$

где  $R'$  — радиус точки на диафрагме,  $r$  — радиус соответствующей точки на гартманнограмме.

После дифференцирования и отбрасывания членов высших порядков малости по отношению к линейному приближению получим

$$\Delta R_0 = -FR_0(Dx \cos \Phi + Dy \sin \Phi)/R.$$

В рассматриваемой программе астигматизм определяется следующим образом. Сначала выбираем все точки, для которых выполняется условие  $\Phi \in (0^\circ, 22^\circ 30')$  и вычисляем для них  $\Delta R_0$ . Усредняем эту величину для всех точек и выдаем на печать. Повторяем процесс для сектора  $(22^\circ 30', 45^\circ)$  и так далее,

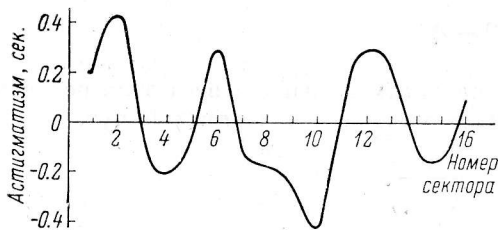


Рис. 7. Пример кривой астигматизма.

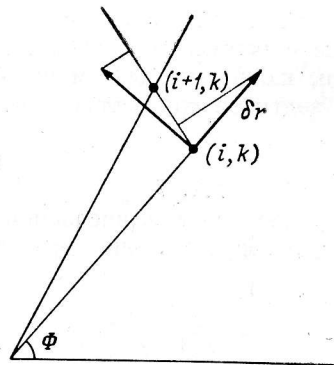


Рис. 8. К выводу формулы (14).

всего 16 раз. Пример кривой астигматизма, полученной таким образом, приведен на рис. 7.

3. Вычисление нормальных отклонений зеркала. Каждую точку на зеркале характеризуют отклонения  $Dx$  и  $Dy$ , которые представляют собой поперечные аберрации зеркала. Сначала разложим эти отклонения на радиальную  $\delta r$  и тангенциальную  $\delta \tau$  составляющие (рис. 8):

$$\begin{aligned} \delta r &= Dx \cos \Phi + Dy \sin \Phi, \\ \delta \tau &= Dx (\cos \Phi \cos B - \sin \Phi \sin B) + Dy (\sin \Phi \cos B + \cos \Phi \sin B). \end{aligned} \quad (14)$$



Под тангенциальным направлением будем понимать направление вдоль линии, соединяющей точки  $(i, k)$  и  $(i+1, k)$  диафрагмы (рис. 8).

Определяем расстояние  $D$  между точками  $(i, k)$  и  $(i+1, k)$  (рис. 9):

$$D^2 = (P1)^2 + (P2)^2 - 2(P1)(P2)\cos\Phi_0. \quad (15)$$

а затем  $\sin B$  и  $\cos B$ . Как показано на рис. 10, здесь возможны два случая. И в том и в другом случаях

$$\sin B = (P2)\sin\Phi_0/D, \quad (16)$$

$$\cos B = [(P2)\cos\Phi_0 - P1]/D. \quad (17)$$

Для точек с номерами  $k=1$  и  $k=2$  формулы (14), (15) и (16), (17) будут несколько отличаться (см. рис. 2).

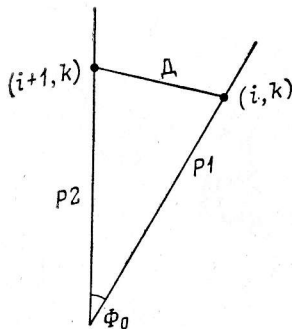


Рис. 9. К выводу формулы (15).

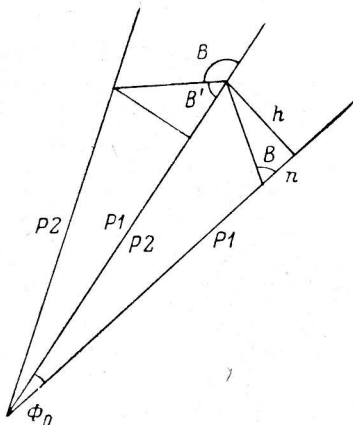


Рис. 10. К выводу формул (16) и (17).

Обозначим через  $H_1 [i, k]$  отклонение (нормальное) точки реального зеркала от идеального зеркала вдоль радиальных разрезов (32 разреза). Нормальное отклонение точки реального зеркала от идеального вдоль тангенциальных разрезов (8 разрезов) обозначим  $H_2 [i, k]$ . Отметим, что величины  $Dx$  и  $Dy$  у предфокальных и зафокальных снимков Гартманна имеют противоположные знаки.

Процесс вычислений нормальных радиальных и тангенциальных профилей  $H_1$  и  $H_2$  сводится к следующему. Ищем для данного разреза первую недефектную точку. Пусть ее номер  $\check{y}$ . Примем, что  $H_{1\check{y}}=0$ ,  $H_{2\check{y}}=0$ . Для точки с номером  $\check{y}+1$

$$H_1 [\check{y} + 1] = \Delta H_1 [\check{y}]/2 + \Delta H_1 [\check{y} + 1]/2, \text{ где } \Delta H_1 [k] = E\delta r/2R_0.$$

Тогда для любой точки с номером  $k > \check{y}$

$$H_1 [k] = \Delta H_1 [\check{y}]/2 + \sum_{j=\check{y}}^{k-1} \Delta H_1 [j] + \Delta H_1 [k]/2.$$

Если встречается вдоль данного разреза дефектная точка, то ей приписываются координаты  $x=y=9999$ , а приращение нормального профиля определяется интерполированием по двум соседним нормальным точкам:

$$\Delta H_1 [k] = \Delta H_1 [k-1]/2 + \Delta H_1 [k+1]/2.$$

В случае, если за одной дефектной точкой следует другая дефектная или данная точка является крайней, принимается

$$\Delta H_1 [k] = \Delta H_1 [k-1].$$

Для точек с номерами  $k < \check{y}$  полагаем

$$H_1[i, k] = -H_1[i, \check{y} + 1] (\check{y} + 1 - k).$$

Аналогично выполняется процедура построения тангенциальных нормальных профилей. Поскольку тангенциальные разрезы замкнуты, то для любой точки величину  $H_2$  можно вычислить дважды. Понятно, что эти два значения в принципе должны совпадать.

Однако ввиду существования случайных ошибок измерений и сделанных нами методических упрощений эти значения в общем случае могут не совпадать. Разность этих двух значений равномерно распределяется между всеми точками разреза с тем, чтобы он оказался замкнутым.

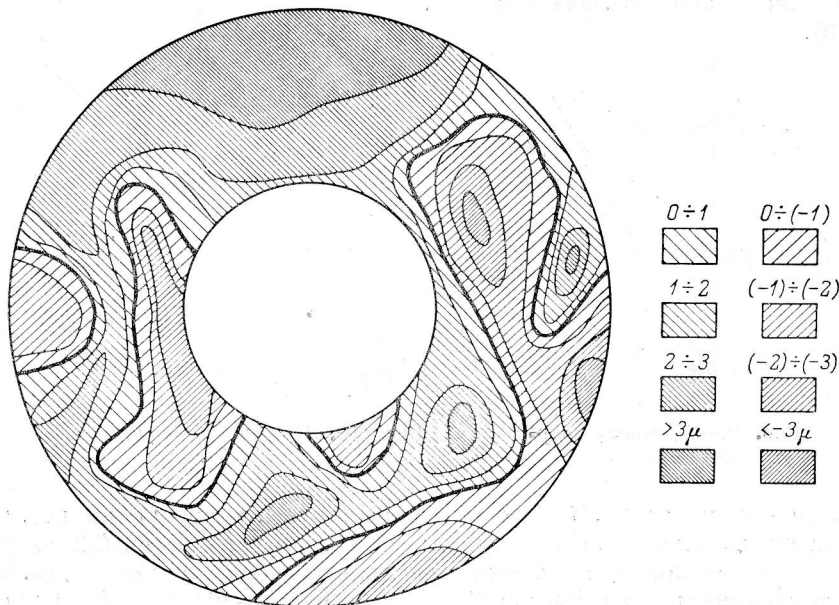


Рис. 11. Пример карты нормальных отклонений.

Направление штрихов определяет подъем или впадину, густота — разную величину отклонения поверхности от нулевого уровня в микронах.

4. *Приведение всех разрезов к одному нуль-пункту.* При выбранном способе построения разрезов зеркала нуль-пункты всех профилей различны. Для построения карты зеркала необходимо все профили свести к одному нуль-пункту.

Выберем тангенциальный профиль  $k=4$  за основной. Определим величину

$$H_4 = \sum_{i=1}^{32} H_2[i, 4]/32.$$

Примем величину  $H_4$  за нуль-пункт для всех разрезов. Приведем все радиальные профили к этому нуль-пункту. Для этого для каждого радиального разреза определим величину

$$CM = H_1[i, 4] - (H_2[i, 4] - H_4).$$

Для всех точек, лежащих на  $i$ -м радиусе,

$$H_1'[i, k] = H_1[i, k] - CM.$$

Для тангенциальных профилей за основной выберем профиль  $i=2$ . Этот радиальный профиль уже приведен к общему нуль-пункту. Тогда

$$CM_1 = H_2[2, k] - H_1[2, k],$$

$$H_2'[i, k] = H_2[i, k] - CM_1.$$

Таким образом, к общему нуль-пункту приведены все радиальные и все тангенциальные профили.

5. *Построение карты зеркала.* Для этого на печать выдается таблица тех точек зеркала, в которых уклонения равны  $0, \pm h, \pm 2h, \pm kh$ , где  $h$  — шаг изменения уклонения в микронах. Ищем вдоль профиля такие две точки  $k$  и  $k+1$ , чтобы для них выполнялось условие

$$(H_1[i, k] \geq H \wedge H_1[i, k+1] \leq H) \vee (H_1[i, k] \leq H \wedge H_1[i, k+1] \geq H).$$

Интерполированием находим такой номер (обозначим его  $k_3$ ), для которого  $H_1[i, k_3]=0$ . В общем случае номер будет дробным. Выдаем его на печать. Находим все такие точки на выбранном профиле. Повторяем процесс

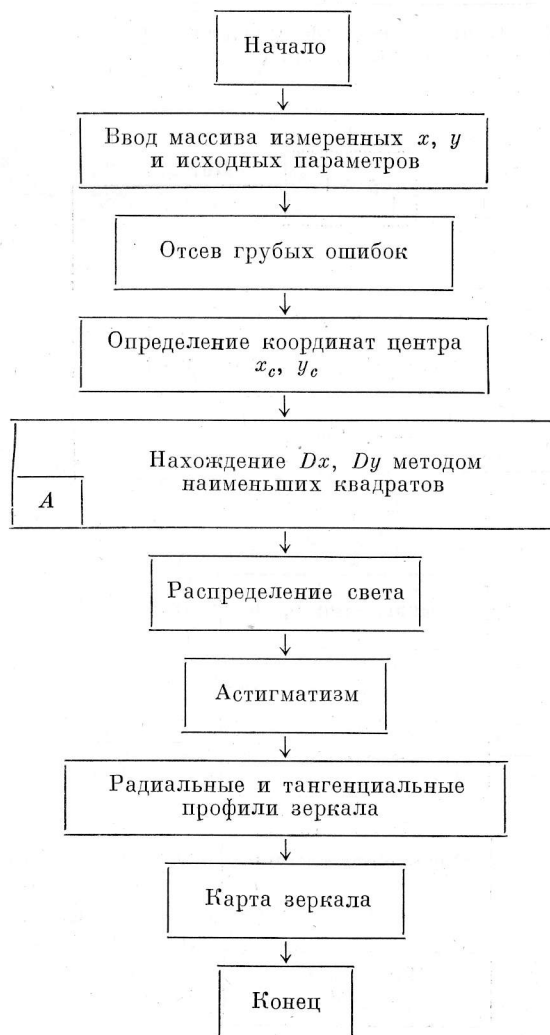


Рис. 12. Блок-схема программы «Гартманн».

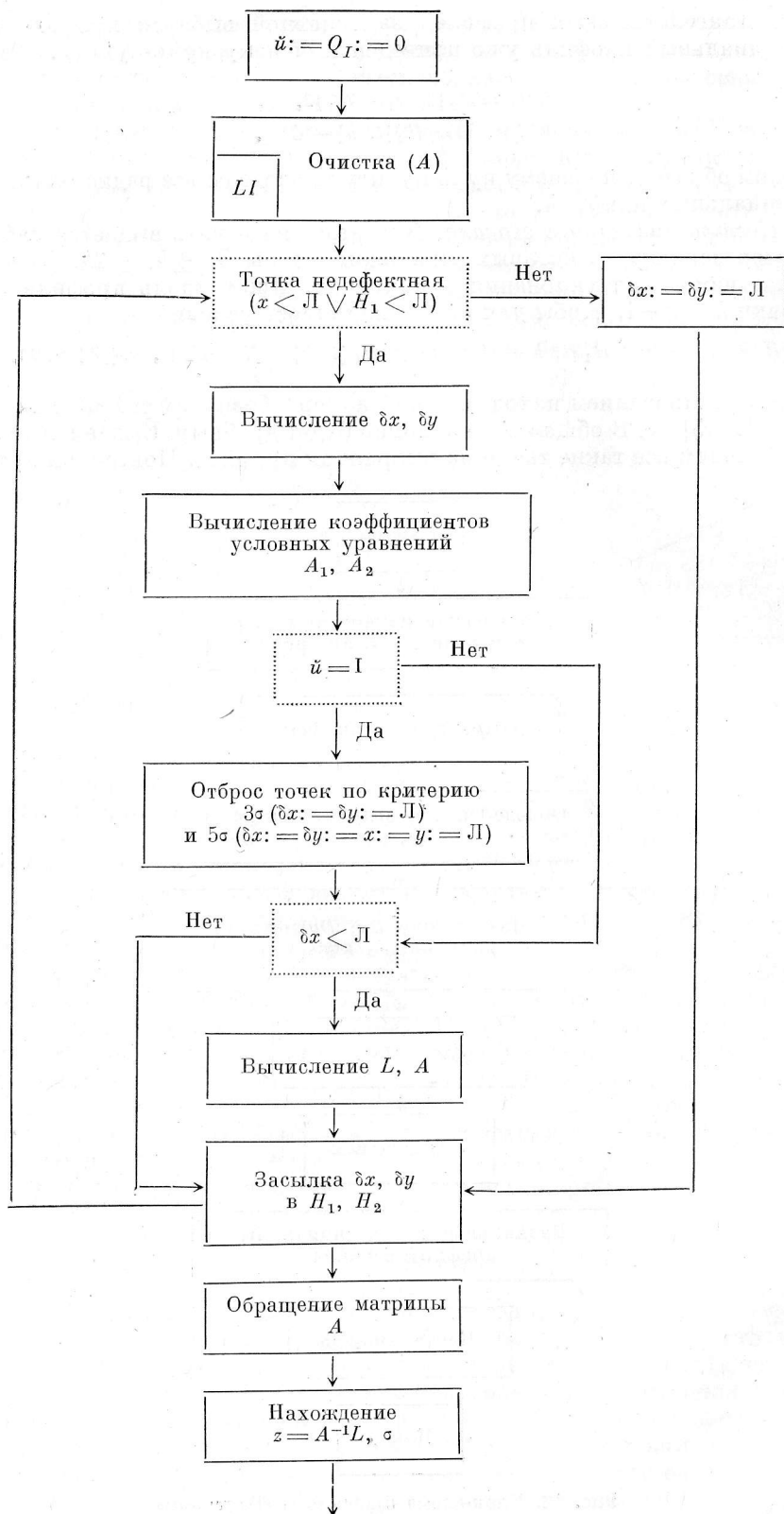


Рис. 13. Блок-схема блока А программы «Гартманн».

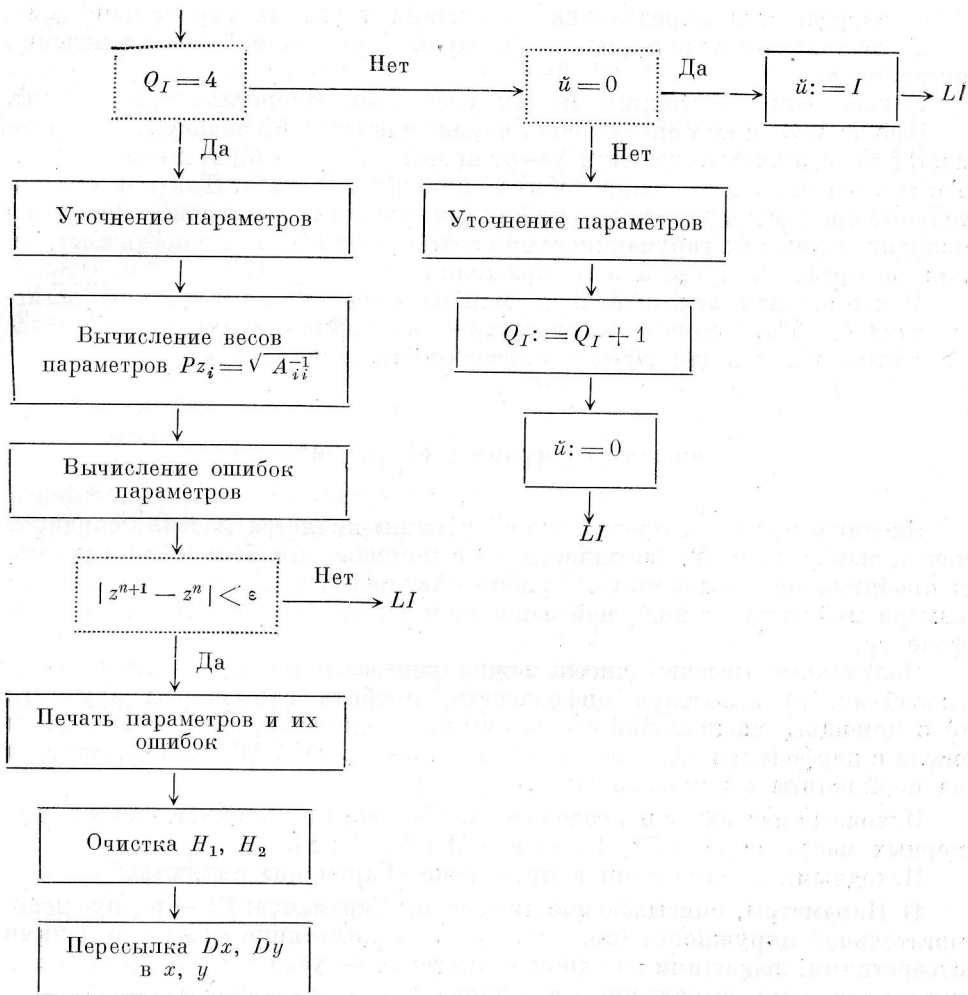


Рис. 13 (продолжение).

для других уровней  $H$ . Аналогично обрабатываются тангенциальные профили.

Полученные точки наносим на план, точки равных высот соединяем плавной линией. Построение карты зеркала закончено.

На рис. 11 приведен пример карты зеркала, полученной при исследовании параболического зеркала диаметром 600 см.

#### Оценка ошибок метода

Метод Гартманна позволяет получить следующие величины, характеризующие форму и качество поверхности зеркала:

- 1) радиус кривизны парааксиальной зоны  $R_0$ ;
- 2) распределение света в изображении точки,
- 3) кривую астигматизма,
- 4) карту нормальных отклонений поверхности от идеального параболоида.

Точность определения этих характеристик зависит от:

- а) погрешности вычисления параметров,

б) погрешности определения положения точек на гартманнограмме,  
в) точности интерполяционной формулы, применяемой при вычислении интегралов,

г) величины расстояния между соседними отверстиями диафрагмы.

При этом точность определения характеристик 1—3 зависит от погрешностей а), б), а характеристики 4 — от погрешностей а), б), в) и величины г) Тогда точность определения радиуса кривизны  $\delta_1=1\%$ . Так как относительные среднеквадратичные ошибки вычисления параметров и измерения координат точек на гартманнограмме составляют 1%, то точность построения распределения света в изображении точки  $\delta_2=12\%$ .

Максимальная относительная ошибка определения величины астигматизма  $\delta_3=5\%$ . Суммарная относительная ошибка определения нормального отклонения в данной точке поверхности зеркала  $\delta_4=5\%$ .

### Описание программы «Гартманн»

Входным массивом программы «Гартманн» является массив координат точек, измеренных на фотопластинке с помощью прибора «Аскорекорд», и пробитый на перфокартах. Прибор «Аскорекорд» печатает координаты измеряемой точки на пишущей машинке и одновременно выдает их на перфоленду.

Полученные массивы чисел можно перевести на перфокарты двумя способами: а) используя цифропечать, пробить перфокарты вручную; б) с помощью специальной программы перекодировки, которая считывает числа с перфоленды «Аскорекорда», печатает их на АЦПУ и перфорирует на перфокарты с помощью ПРК.

Исходные массивы  $x$  и  $y$  содержат по 256 чисел и оформлены в виде двумерных массивов  $x[1:32, 1:8]$  и  $y[1:32, 1:8]$ .

Исходными параметрами в программе «Гартманн» являются:

1) Параметры, описывающие диафрагму Гартманна:  $R_1$  — радиус вспомогательной окружности (см. рис. 2);  $B$  — расстояние между соседними отверстиями, лежащими на одном радиусе;  $\Phi_0$  — угол между двумя соседними радиусами, выраженный в радианах;  $d$  — расстояние от центра зеркала до центра диафрагмы.

2) Параметр, описывающий исследуемое зеркало:  $R_0$  — радиус кривизны параксиальной области для параболического зеркала или радиус кривизны для сферического зеркала.

3) Параметры, описывающие условия получения гартманнограмм:  $T$  — расстояние от фотопластинки до центра кривизны зеркала;  $F$  — зафокальный ( $F=1$ ) или предфокальный ( $F=-1$ ) снимок;  $C$  — используется ( $C=0$ ) или не используется ( $C=1$ ) корректор в оптической схеме.

В программе введены следующие обозначения:  $Q=7$  — число параметров, определяемых методом наименьших квадратов;  $\dot{y}$ ,  $Q_1$  — параметры счетчики, с помощью которых строится логическая схема блока  $A$ , в котором вычисляются отклонения методом наименьших квадратов (рис. 12, 13);  $L-9999$  — число, которое присваивается координатам дефектной точки;  $x_c, y_c$  — координаты центра гартманнограммы;  $Dx, Dy$  — отклонения точек;  $A_1, A_2$  — коэффициенты условных уравнений;  $A$  — матрица нормальной системы уравнений;  $H_1, H_2$  — массивы нормальных профилей, радиальных и тангенциальных соответственно;  $z$  — массив поправок параметров;  $\sigma$  — средняя квадратичная ошибка одного условного уравнения на единицу веса;  $P_z$  — массив, в котором сначала хранятся веса поправок параметров, а затем ошибки параметров.

### Заключение

Разработанная здесь программа «Гартманн» обладает следующими преимуществами.

1. Метод Гартманна становится намного оперативнее. Получение снимков Гартманна требует 2—3 час., измерение их на «Аскорекорде» также занимает 2—3 часа, счет на ЭВМ идет 15—20 мин., представление результатов требует 2—3 часа. Всего на получение и обработку результатов требуется 8—10 час. При ручном способе обработки необходимо затратить 30—40 час. работы двух вычислителей.

2. Программа «Гартманн» обрабатывает как зафокальные, так и предфокальные снимки Гартманна.

Основным ограничением метода Гартманна является его низкое разрешение по поверхности зеркала. По этой причине метод следует применять с осторожностью к «негладким» зеркалам, имеющим много мелких локальных дефектов.

В заключение приносим благодарность И. М. Копылову за внимание к работе, Ю. П. Коровяковскому — за проверку алгоритма и программы, М. Ф. Шабанову и В. А. Круглову — за получение гартманнограмм, Ю. Ф. Антропову и И. А. Лебедевой — за подготовку исходных массивов чисел, Г. М. Бескину и А. М. Богудлову — за полезные дискуссии, Г. И. Амуру и К. Воронкову — за обсуждение результатов.

### Литература

1. N. U. Mayall, S. Vasilovskis, Lick Obs. Bull., 567, 304, 1960.