

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ДИАГРАММЫ И ИСТОЧНИКОВ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ НА РАДИОТЕЛЕСКОПЕ РАТАН-600

Т. В. Пятунина

Рассматривается применение метода наименьших квадратов при оценке средне выборочных параметров диаграммы радиотелескопа РАТАН-600 как для Северного, так и для Южного сектора с плоским перископическим отражателем, а также при оценке координат и потоков наблюдаемых радиоисточников.

Applications of the least-squares-method for estimation of beam and sources parameters from RATAN-600 observations are given in the two main modes of observations, namely with the northern sector and with the southern sector and the flat periscopic reflector.

1. Общие соотношения метода наименьших квадратов. При нахождении из наблюдений любых параметров, будь то координаты, потоки и угловые размеры источников либо параметры диаграммы направленности радиотелескопа, неизбежно встает вопрос о методах и принципах параметризации, а также оценке ее математической достоверности. Математической основой параметризации служит принцип максимального правдоподобия. В последние годы в связи с машинной обработкой сложных изображений широкое распространение получил метод максимальной энтропии.

Метод наименьших квадратов может быть выведен из принципа максимального правдоподобия в предположении, что отклонения от принятой модели $g_i(X_k)$ результатов реальных наблюдений y_i , где X_k — неизвестные параметры, а $i=1, 2, 3, \dots, n$, носят случайный характер и подчиняются нормальному распределению [1]:

$$P(y_i, g_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp(-\varepsilon_i^2/2\sigma_i^2). \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_i = (y_i - g_i)$ — невязки, а σ_i^2 — дисперсия «шумов» эксперимента.

Подробное описание метода наименьших квадратов (МНК) в применении к анализу наблюдений можно найти в книге Брандта [2]. Для удобства изложения приведем основные соотношения МНК для случая не прямых измерений. В этом случае, как уже отмечалось выше, реально измеряемые величины зависят от ряда неизвестных параметров x_j . Зависимость y_i от параметров x_j с точностью до погрешностей ε_i может быть, как предполагается, описана модельной функцией g_i . Тогда система условных уравнений для определения параметров x_j может быть записана в виде

$$y_i - \varepsilon_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0. \quad (2)$$

Чтобы привести систему (2) к линейному виду, используется разложение в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки X_0 , представляющей собой нулевое приближение искомых параметров x_j , с точностью до линейных членов:

$$g_i(X) = g_i(X_0) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}\right)_{X_0} (x_1 - x_{10}) + \dots + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)_{X_0} (x_k - x_{k0}).$$

Тогда система линейных условных уравнений принимает вид

$$-\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}\right)_{X_0} (x_1 - x_{10}) - \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_2}\right)_{X_0} (x_2 - x_{20}) - \dots - \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)_{X_0} (x_k - x_{k0}) + (y_i - g_i(X_0)) - \varepsilon_i = 0.$$

Или в матричной форме:

$$A\xi + C - \varepsilon = 0, \quad (3)$$

где A — матрица системы условных уравнений,

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_{X_0} - \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_{X_0} - \dots - \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_k}\right)_{X_0} \\ -\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)_{X_0} - \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)_{X_0} - \dots - \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\right)_{X_0} \\ \dots \\ -\left(\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\right)_{X_0} - \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_2}\right)_{X_0} - \dots - \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_k}\right)_{X_0} \end{pmatrix};$$

C — свободный член, вектор-столбец,

$$C = \begin{pmatrix} y_1 - g_1(X_0) \\ y_2 - g_2(X_0) \\ \dots \\ y_n - g_n(X_0) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

а ξ — искомое приращение к нулевому приближению параметров.

Решение этой системы имеет, как известно, вид

$$\xi = -(A^T G_y A)^{-1} A^T G_y C, \quad (5)$$

где G_y — весовая диагональная матрица предполагаемых погрешностей измеренных величин:

$$G_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}.$$

При выполнении нормального закона распределения ошибок (1) предполагаемые погрешности равны математическому ожиданию соответствующих квадратов невязок:

$$\sigma_i^2 = E(\varepsilon_i^2).$$

Ошибки неизвестных ξ определяются как корни квадратные из диагональных членов ковариационной матрицы B , обратной матрице системы нормальных уравнений:

$$B = (A^T G_y A)^{-1}.$$

С помощью полученного решения мы заменяем нулевое приближение неизвестных параметров на более точное

$$x_j = x_{j0} + \xi_j$$

и повторяем процедуру до тех пор, пока не достигнем минимума M — функции, характеризующей среднеквадратичные отклонения результатов наблюдений от принятой модели, а именно,

$$M = \varepsilon^T G_y \varepsilon,$$

где ε — вектор остаточных ошибок измерений,

$$\varepsilon = -A\tilde{x} + C,$$

а \tilde{x} — наилучшая, в смысле наименьших квадратов, оценка неизвестных.

Функция M подчиняется распределению χ^2 с $n-k$ степенями свободы и может быть использована для оценки достоверности модели, описывающей наблюдения, и качества подгонки по МНК. Результат подгонки должен быть отвергнут, если

$$M > \chi_{(1-\alpha)}^2(n-k),$$

т. е. если M превышает критическое значение χ^2 , соответствующее уровню значимости α и числу степеней свободы $n-k$.

Плохое качество подгонки может быть вызвано следующими причинами.

1. Принятая функциональная зависимость между неизвестными параметрами и измеряемыми величинами не соответствует действительности, в частности, это может означать, что разложение в ряд Тейлора с точностью до линейных членов недостаточно.

2. Нулевое приближение выбрано слишком грубо, в этом случае изменение исходного X_0 может привести к хорошему результату.

3. Принятые значения погрешностей измеренных величин y_i , а именно σ_i^2 слишком занижены.

В тех случаях, когда M превышает критическое значение χ^2 , каждая из этих причин должна внимательно анализироваться.

2. Определение средневыборочных параметров диаграммы направленности РАТАН-600.

2.1. Режим (ЮГ + плоский). Гауссова модель. Как известно (см., например, [3]), полуширина горизонтальной диаграммы направленности Южного сектора с плоским перископическим отражателем (Ю+П) не зависит от разности высот источника и диаграммы, поэтому результаты наблюдений полностью характеризуются двумя сечениями диаграммы, по горизонтали и вертикали. Причем горизонтальное сечение однозначно соответствует кривой прохождение источника, а вертикальное сечение (вертикальная диаграмма направленности) должно быть построено по наблюдениям на разных высотах одного яркого источника либо целой группы. Так как наблюдения на РАТАН-600, как правило, проводятся в ограниченном интервале склонений, то оценка диаграммы по одному, даже очень яркому источнику в достаточно широких пределах практически невозможна. Поэтому встает вопрос об оценке средневыборочных параметров диаграммы, т. е. параметров, найденных по выборке достаточно ярких источников [4-6].

Итак, рассмотрим выборку из k источников. Изменяемыми величинами для каждого источника являются антенные температуры: $T_{i1}, T_{i2}, T_{i3}, \dots, T_{in}$, соответствующие расчетным склонениям диаграммы $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, или, так как склонения источников предполагаются известными, расчетным разностям

$$(\delta_i - d_1), (\delta_i - d_2), \dots, (\delta_i - d_n)$$

склонений электрической оси диаграммы и источника. Предполагается также, что потоки всех источников известны заранее. Чтобы свести все источники в единую шкалу, в качестве измеряемых величин примем

$$y_{ij} = (T_{ij}/S_i),$$

в качестве известного аргумента расчетное значение

$$l_{ij} = (\delta_i - d_j).$$

Неизвестными параметрами диаграммы при этом являются:

$$x_1 = k = (T^{\max}/S)$$

— калибровочный коэффициент пересчета антенных температур в потоки; $x_2 = \Delta h$ — смещение электрической оси диаграммы относительно расчетного положения; $x_3 = \text{HPBW}/1.667$ — гауссовый параметр, соответствующий полуширине диаграммы направленности HPBW. Модель, принятая для описания диаграммы направленности, представляет собой гауссиану:

$$g_{ij} = x_1 \exp(-((l_{ij} - x_2)/x_3)^2).$$

Тогда элементы матрицы A системы условных уравнений (3) принимают в соответствии с формулой (4), следующий вид:

$$A_{r1} = - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1} \right)_{x_0} = - \exp(-((l_{ij} - x_{20})/x_{30})^2);$$

$$A_{r2} = - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_2} \right)_{x_0} = - \frac{2x_{10}(l_{ij} - x_{20})}{x_{30}^2} \exp(-((l_{ij} - x_{20})/x_{30})^2);$$

$$A_{r3} = - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_3} \right)_{x_0} = - \frac{2x_{10}(l_{ij} - x_{20})^2}{x_{30}^3} \exp(-((l_{ij} - x_{20})/x_{30})^2).$$

Решение системы условных уравнений производится по формулам, приведенным выше.

ТАБЛИЦА 1

1982 г.			1985 г.		
Источник	Δh , мин. дуги	T_a/S , К/Ян	Источник	Δh , мин. дуги	T_a/S , К/Ян
3С 98	-2.0	0.177 ± 0.008	3С 98	10.5	0.147 ± 0.008
	21.5	0.086 ± .008		28.0	0.150 .008
	2.2	0.175 .008		14.6	0.149 .008
0417 ± 10	25.6	0.064 .008	0417 + 10	32.1	0.126 .008
	20.3	0.107 .008		32.7	0.107 .008
0445 + 10	45.8	0.074 .008	0445 + 10	50.2	0.039 .020
0506 ± 10	-10.2	0.142 .010	0506 ± 10	-21.4	0.026 .010
0532 + 10	0506 ± 10	0.124 .008	0452 + 10	-3.9	0.082 .010
	11.3	0.175 .0010		13.6	0.171 .008
0629 + 10	0532 + 10	0.065 .010	0629 + 10	-3.0	0.082 .015
	4.3	0.184 .010		14.5	0.171 .015
0629 + 10	0629 + 10	0.177 .008	0506 + 10	32.0	0.121 .015
	23.4	0.074 .008		0.04	0.075 .008
				17.6	0.172 .008
				35.0	0.116 .010
			0532 + 10	-7.0	0.053 .010
				10.5	0.139 .010
			0629 + 10	11.9	0.146 .008
				29.4	0.138 .008
				46.9	0.029 .010

Параметры:

$$k=0.184 \text{ К/Ян}$$

$$\text{НРВW}=1.667 \times 22.6 \text{ мин. дуги} = 37.7 \text{ мин. дуги}$$

$$\Delta h = +2.6 \text{ мин. дуги}$$

$$M=5.0$$

$$\chi^2=4.9$$

Параметры:

$$k=0.167 \text{ К/Ян}$$

$$\text{НРВW}=1.667 \times 23.8 \text{ мин. дуги} = 39.7 \text{ мин. дуги}$$

$$\Delta h = +19.0 \text{ мин. дуги}$$

$$M=7.06$$

$$\chi^2=10.1$$

Параметры нормированной сводной диаграммы

$$\text{НРВW}=1.667 \times 23.13 \text{ мин. дуги} = 38.6 \text{ мин. дуги}$$

$$\Delta h=0.12 \text{ мин. дуги}$$

$$M=8.55$$

$$\chi^2=21$$

В качестве иллюстрации возможностей описанного алгоритма в табл. 1 и на рис. 1 приведены исходные данные и результаты определения средневыборочных параметров диаграммы для (Ю+П) по данным галактического обзора, выполненного на волне 7.6 см в районе ассоциации Mon R1. Обзор был выполнен за два цикла, в 1982 и 1985 гг. Сравнение полученных величин M с критическими значениями χ^2 показывает, что гауссовая модель может быть успешно использована для описания вертикальной диаграммы направленности РАТАН-600 в режиме (Ю+П) без поперечного выноса. Качество подгонки по МНК иллюстрирует также сводная за два цикла диаграмма, которая была получена после учета систематических смещений Δh_{1982} и Δh_{1985} электрической оси диаграммы в каждом из двух циклов (рис. 1, в).

Из табл. 1 видно, что даже в более благополучном цикле 1982 г. электрическая ось антенны была смещена относительно расчетного положения на 2.6 мин. дуги. К сожалению, оперативно устранить даже такие большие смещения, как в цикле 1985 г. ($\Delta h = 19$ мин. дуги), не всегда представляется возможным, и приходится учитывать их во время обработки.

Полуширины диаграммы направленности за 1982, 1985 гг. и сводной равны 37.7, 39.7 и 38.6 мин. дуги соответственно. Измеренная Темировой [3] по ярким источникам вертикальная диаграмма (Ю+П) на волне 8.2 см равна 40 мин. дуги, что при пересчете на волну 7.6 см дает 37.4 мин. дуги. Как видно, расхождение диаграммы, измеренной по яркому источнику, и средневыборочной диаграммы за 1982 г. не превышает 1.6 %. Распирение диаграммы в цикле 1985 г. на 7 % связано, очевидно, не с точностью оценки средневыборочных параметров, а с теми же ошибками в юстировке антенны, которые привели к смещению электрической оси на 19 мин. дуги и падению на 10 % коэффициента k .

Очевидно, что используя средневыборочные параметры диаграммы, можно по тем же самым формулам МНК найти для остальных источников обзора координаты и пиковые значения антенных температур и потоки.

2.2. Режим «Север». Диаграмма Северного сектора РАТАН-600 имеет, как известно, довольно сложную форму типа «гантели» [7, 9]. Поэтому кроме зависимости антенной температуры от Δh — разности высот источника и диаграммы — необходимо еще знать зависимость от Δh полуширины наблюдаемой кривой прохождения. При оценке средневыборочной диаграммы возможны два пути: 1) подобрать, как в случае (Ю+П), для $T_a(\Delta h)$ и НРВW (Δh) простые аналитические выражения; 2) использовать расчетные теоретические соотношения, подбирая по МНК из наблюдений соответствующие размерные множители и константы. Второй путь подробно описан в отчете Алиакберова и др. [6], а также в статье Бурсова и др. [8], поэтому мы не будем на нем останавливаться. Заметим лишь, что в этом случае частные производные в матрице условных уравнений находятся численным дифференцированием по таблице, задающей теоретические либо взятые из предшествующих наблюдений значения $T_a(\Delta h)$ и НРВW (Δh).

2.2.1. Аналитическое представление $T_a(\Delta h)$. Простейшим аналитическим описанием зависимости $T_a(\Delta h)$ для Северного сектора может служить сумма двух соосных гауссиан. Физически это оправдано, поскольку вертикальная диаграмма направленности Северного сектора определяется двумя величинами — высотой шпотов Северного сектора и размером стрелки сегмента, работающего на данной высоте [7]:

$$g_{ij} = (1 - x_1) \exp(-((l_{ij} - x_4)/x_2)^2) + x_1 \exp(-((l_{ij} - x_4)/x_3)^2).$$

Известным аргументом в данном случае, так же как и в предыдущем, является расчетная разность склонений источника δ_i и диаграммы d_j

$$l_{ij} = (\delta_i - d_j),$$

а неизвестными параметрами: x_1 — относительная амплитуда подложки; x_2 — параметр гауссианы, описывающей ядро диаграммы; x_3 — то же, для подложки; x_4 — поправка к положению электрической оси диаграммы.

Элементы матрицы условных уравнений принимают при этом вид:

$$A_{r1} = \exp(-((l_{ij} - x_4)/x_2)^2) - \exp(-((l_{ij} - x_4)/x_3)^2) = E_{ij}(x_2) - E_{ij}(x_3);$$

$$A_{r2} = -(1 - x_1) \cdot 2(l_{ij} - x_4)^2 E_{ij}(x_2)/x_2^3;$$

$$A_{r3} = -x_1 \cdot 2(l_{ij} - x_4)^2 E_{ij}(x_3)/x_3^3;$$

$$A_{r4} = -(1 - x_1) \cdot 2(l_{ij} - x_4) E_{ij}(x_2)/x_2^2 - x_1 \cdot 2(l_{ij} - x_4) E_{ij}(x_3)/x_3^2.$$

Результаты аппроксимации зависимости $T_a(\Delta h)$ для Северного сектора суммой двух гауссиан показаны на рис. 2. Наблюдательные данные взяты из [6]. Аппроксимирующие параметры равны: $x_1 = 0.30$, $x_2 = 4.2$, $x_3 = 18.0$ мин. дуги.

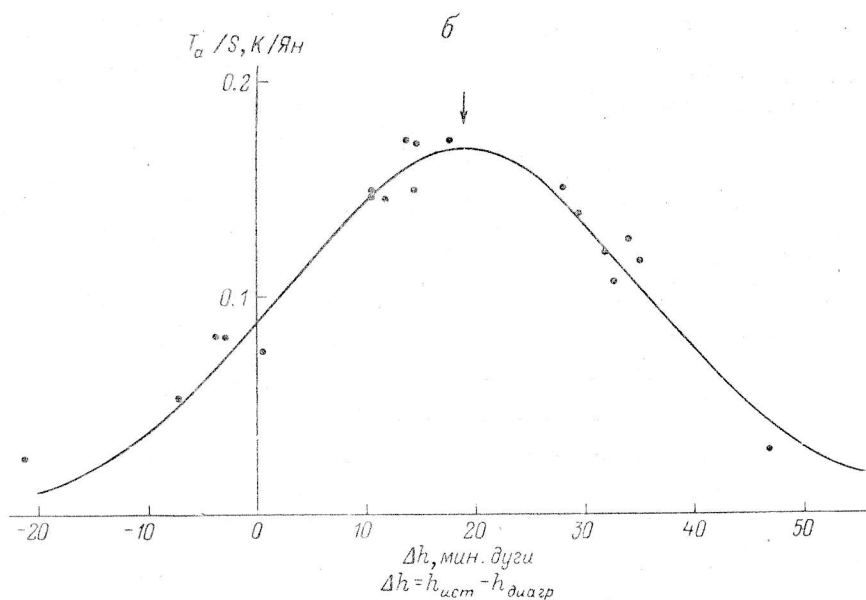
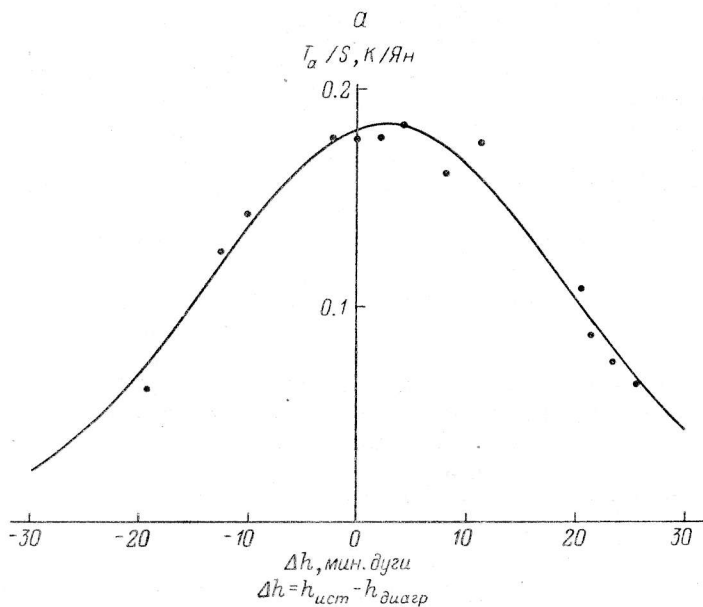
Как видно из рис. 2, а, сумма двух гауссиан может быть с уверенностью использована для аппроксимации вертикального сечения диаграммы направленности Северного сектора РАТАН-600.

2.2.2. Аналитическое представление зависимости НРВW (Δh). Зависимость наблюдаемой полуширины кривой прохождения источника от разности высот (или, что то же самое, разности склонений) источника и диаграммы может быть аппроксимирована простым аналитическим выражением

$$g_{ij} = \sqrt{x_1(l_{ij} - x_2)^2 + x_3x_2 + x_4^2},$$

где x_1 — масштабный множитель, характеризующий градиент Δ НРВW/ Δh ; x_2 — смещение электрической оси диаграммы относительно расчетного; x_4 — полуширина диаграммы направленности в центральном сечении; x_3 — коэффициент, который служит мерой асимметрии НРВW (Δh).

В том случае, если отклонения от асимметрии незначительны, $x_3=0$. Коэффициенты матрицы условных уравнений в этом случае равны:



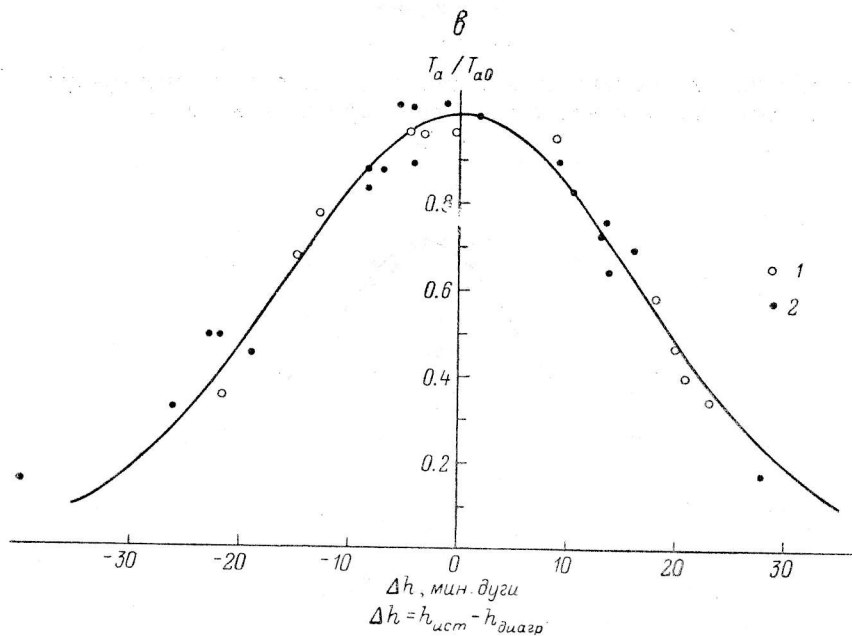


Рис. 1. Средневыборочная вертикальная диаграмма Южного сектора с плоским перископическим отражателем на волне 7.6 см по данным галактического обзора в районе ассоциации Mon RI.

а — наблюдательный цикл 1982 г.; б — цикл 1985 г.; в — сводная диаграмма (1 — 1982 г.; 2 — 1985 г.).

$$A_{r1} = - \frac{(l_{ij} - x_2)^2}{\sqrt{x_1(l_{ij} - x_2)^2 + x_3x_2 + x_4^2}} = - \frac{(l_{ij} - x_2)^2}{2g_{ij}};$$

$$A_{r2} = - (-2x_1(l_{ij} - x_2) + x_3)2g_{ij};$$

$$A_{r3} = - x_2/g_{ij};$$

$$A_{r4} = - x_4/g_{ij}.$$

На рис. 2, б приведена зависимость НРВW (Δh) и ее аппроксимация приведенной выше функцией с параметрами: $x_1=2.26$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=3.8$ сек. (0.95 мин. дуги).

Очевидно, что центральная часть диаграммы, а именно $|\Delta h| \leq 12$ мин. дуги, достаточно точно описывается приведенной выше функцией.

3. Определение параметров источников.

3.1. Метод гауссовых компонент. Первичная обработка наблюдений в том виде, в каком она реализована на РАТАН-600, в настоящее время завершается процедурой гаусс-анализа, в результате которой для каждого источника определяются момент кульминации t_k , антенная температура T_a и полуширина НРВW. Если наблюдения проводятся без поперечного выноса, то момент кульминации t_k не зависит от разности высот источника и диаграммы и, следовательно, прямое восхождение может быть определено по моменту кульминации независимо от склонения источника.

В то же время антенная температура и полуширина кривой прохождения источника являются, как отмечалось выше, функциями разности высот источника и диаграммы. Обозначим склонение источника через x_1 , пиковую антенную температуру x_2 , склонение диаграммы d_i и угловой размер источника x_3 . Обозначим также:

$$g_{1i} = \text{НРВW}(\Delta h_i) = \sqrt{f_i^2(x_1 - d_i) + x_3^2};$$

$$g_{2i} = T_a(\Delta h_i) = x_2 f_i(x_1 - d_i).$$

Наблюдая источник последовательно на нескольких близких высотах, можно по МНК из последовательности измеренных для данного источника величин

$$y_{1i} = g_{1i} + \varepsilon_{1i};$$

$$y_{2i} = g_{2i} + \varepsilon_{2i}$$

найти склонение источника и его пиковую антенную температуру [4—6].
Матрица A системы условных уравнений при этом имеет вид:

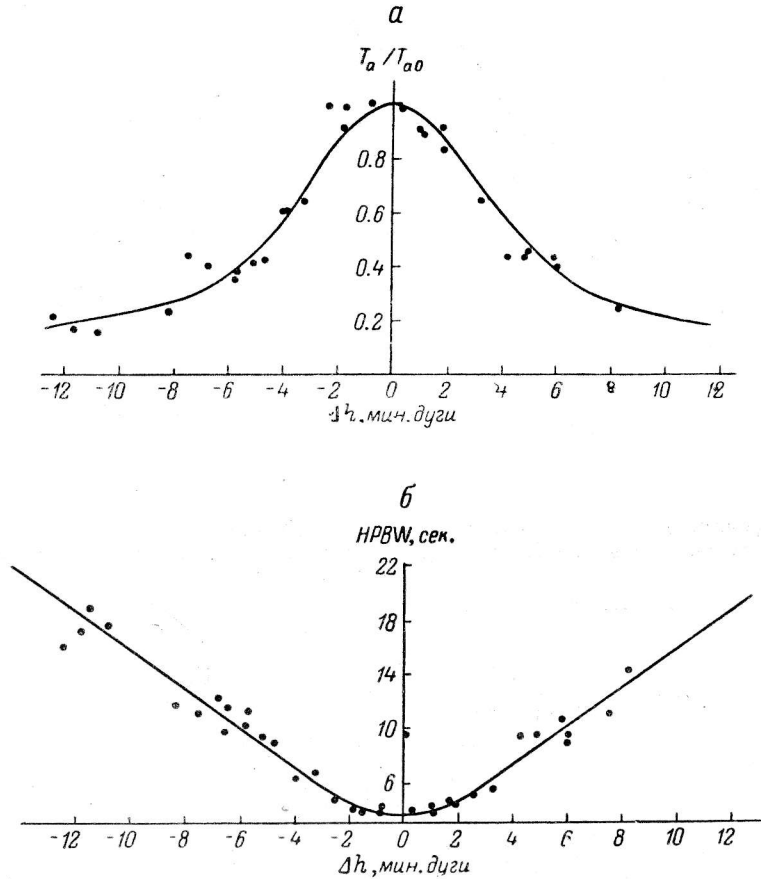


Рис. 2. Средневыборочная вертикальная диаграмма Северного сектора РАТАН-600 по наблюдениям, выполненным группой авторов [10] на волне 7.6 см в феврале—марте 1987 г.
 a — антенная температура T_a как функция разности высот источника и диаграммы Δh ; сплошная линия — аппроксимация суммой двух диаграмм; b — полуширина кривой прохождения НРВВ (Δh); сплошная линия — аппроксимация корнем квадратным из полинома 2-й степени.

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{f_1(x_1 - d_1)}{g_{11}} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{X_0} & 0 & \left(\frac{x_3}{g_{11}} \right)_{X_0} \\ \left(x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{X_0} & (f_2(x_1 - d_1))_{X_0} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{f_1(x_1 - d_i)}{g_{1i}} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{X_0} & 0 & \left(\frac{x_3}{g_{1i}} \right)_{X_0} \\ \left(x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{X_0} & (f_2(x_1 - d_i))_{X_0} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

вектор-столбец C :

$$C = \begin{pmatrix} y_{11} - g_{11}(X_0) \\ y_{21} - g_{21}(X_0) \\ \dots \\ y_{1n} - g_{1n}(X_0) \\ y_{2n} - g_{2n}(X_0) \end{pmatrix}$$

и весовая матрица:

$$G_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2 (\text{НРВW})_{d_1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \frac{1}{\sigma^2 (T_a)_{d_1}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma^2 (\text{НРВW})_{d_n}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sigma^2 (T_a)_{d_n}} \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование функций f_1 и f_2 производится либо численно по таблице значений, либо по аппроксимирующим выражениям (см. предыдущий раздел).

Хотя мы привели совместную систему, в принципе при достаточном количестве наблюдений можно определить склонение либо только по полуширинам, либо только по антенным температурам. Все эти возможности подробно обсуждаются в работах [6, 8]. Там же исследуются возможные ошибки метода. Здесь достаточно указать, что для сильных источников (при отношении сигнал/шум около 20) метод обеспечивает координатную точность по склонению 2—3 сек. дуги.

Описанный выше метод имеет два идеологических ограничения: 1) первичный гаусс-анализ производится независимо на каждом сечении, таким образом, задача довольно искусственно разбивается на два этапа и погрешность первичного разбиения в гауссовы компоненты на разных сечениях дает избыточную, по сравнению с шумовой, погрешность измерения; 2) при наблюдениях с поперечным выносом представление кривых прохождения гауссовыми компонентами некорректно в принципе и может привести к значительным погрешностям.

Чтобы снять первое ограничение, необходимо в принципе делать двумерный гаусс-анализ. Однако по причинам, указанным выше, двумерный гаусс-анализ возможен только по отношению к наблюдениям, выполненным на Южном секторе с плоским перископическим отражателем. Для Северного сектора с его сложной диаграммой необходим другой подход.

3.2. «К в а з и д в у м е р н ы й» г а у с с - а н а л и з. В этом случае, так же как и раньше, каждая кривая прохождения аппроксимируется простой гауссовой функцией, параметры которой известным образом зависят от разности высот источника и диаграммы. Однако исходными данными для МНК служат уже не параметры гауссовых компонент, полученные на разных высотах, а непосредственно измеренные антенные температуры. Результаты наблюдений представляются в виде двумерной таблицы антенных температур T_{ij} , где i — номер сечения, а j — номер точки на сечении. Предположим, что сечения синхронизованы по времени. Если это условие не выполнено, то ввести соответствующие поправки не представляет труда. Кроме того, предполагается, что источник является точечным. Тогда наблюдаемая антенная температура в точке с координатами i, j равна

$$T_{ij} = x_2 f_1(x_1 - d_i) \exp(-((t_j - x_3)/0.598 f_2(x_1 - d_i))^2),$$

где $x_1 = \delta$ — склонение источника; $x_2 = T_a$ — пиковая антенная температура; $x_3 = \alpha$ — прямое восхождение источника; t_j — момент времени, соответствующий точке с координатой j .

Множитель 0.598 переводит значение полуширины кривой прохождения НРВW в соответствующий параметр гауссианы. Обозначим

$$E_{ij} = \exp(-((t_j - x_3)/0.598 f_2(x_1 - d_i))^2).$$

Каждой точке T_{ij} соответствует условное уравнение, коэффициенты которого равны:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_1} = x_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + 2 \frac{(t_j - x_3)^2 f_1(x_1 - d_i)}{(0.598)^2 f_2^2(x_1 - d_i)} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) E_{ij};$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_2} = f_1(x_1 - d_i) E_{ij};$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_3} = \frac{2x_1 f_1(x_1 - d_i)(t_j - x_3)}{(0.598 f_2(x_1 - d_i))^2} E_{ij}.$$

При этом матрица условных уравнений будет равна

$$A = - \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} & \frac{\partial T_{11}}{\partial x_2} & \frac{\partial T_{11}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} & \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} & \frac{\partial T_{12}}{\partial x_3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} & \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} & \frac{\partial T_{21}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial x_1} & \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} & \frac{\partial T_{22}}{\partial x_3} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец представляет собой разности реально наблюдаемых значений T_{ij} и предвычисленных при $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $x_3 = x_{30}$:

$$C = \begin{pmatrix} T_{11} - T_{11}(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \\ T_{12} - T_{12}(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \\ \dots \\ T_{ij} - T_{ij}(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \\ \dots \end{pmatrix}.$$

В том случае, если по описываемому методу обрабатываются уже усредненные данные, все значения предполагаются равноточными и все члены диагональной матрицы G_y равными $1/\sigma^2$, где σ^2 — дисперсия шумов. Однако применение МНК представляет собой статистический вероятностный подход к интерпретации наблюдений и не требует предварительного усреднения. Более того, анализ различных реализаций, каковыми и являются кривые прохождения, полученные в разные даты, позволил бы в принципе оценить реальные погрешности и повысить качество подгонки по МНК, которое зависит от качественной оценки весовых коэффициентов. Легко видеть, что вышесказанное относится не только к усреднению кривых прохождения, но и к накоплению сигнала внутри интервала усреднения. Таким образом, идеальный наблюдательный материал для МНК — выход цифрового радиометра, который кроме усредненного значения антенной температуры в момент времени t оценивает и его вероятную дисперсию по статистике шумов на входе и шумов самого радиометра.

Макетный вариант программы «квазидвумерного» гаусс-анализа был реализован на миникомпьютере ИР 9825. Все наблюдаемые значения антенных температур считались равноточными. В качестве исходного материала были ис-

ТАБЛИЦА 2

Параметр	Нулевое приближение	Первое приближение	Второе приближение
Антенная температура в максимуме T_a , мК	396	425	389
Видимое склонение $\delta_{12.12.83}$	$1^{\circ}00'92 \pm 0.3$	$1^{\circ}00'67$	$1^{\circ}00'71 \pm 0.06$
Видимое прямое восхождение $\alpha_{12.12.83}$	$18^{\text{h}}03^{\text{m}}16^{\text{s}}.49$	$16^{\text{s}}.17$	$16^{\text{s}}.19_{-0.05}$
M-функция	1150	639	347

пользованы кривые прохождения источника RS (1801+01) из обзора [5] в районе отражательной туманности S 68. В качестве нулевого приближения для «квазидвумерного» гаусс-анализа использовалось решение, найденное методом гауссовых компонент. Дисперсия шумов для всех сечений принята равной 2.1 мК. Наблюдения проводились с выносом 1.6 λ . Необходимые поправки к моментам кульминации определялись по нулевому приближению. Исходные кривые прохождения и остаточные невязки источника RS (1801+01) на видимых склонениях $\delta = 1^{\circ}09'.47$, $1^{\circ}14'.47$ и $1^{\circ}19'.47$ приведены на рис. 3. В табл. 2 приведены параметры последовательных приближений и соответствующие им функции M . Как видно из таблицы, процесс быстро сходится и дает заметное повышение точности решения. Окончательное значение функции $M = 347$. При этом мы использовали 90 независимых измерений, и вероятное значение χ^2 при параметре $\alpha = 0.9$ должно быть 73. Возможные причины такого отклонения — асимметрия кривых прохождения из-за поперечного выноса, оста-

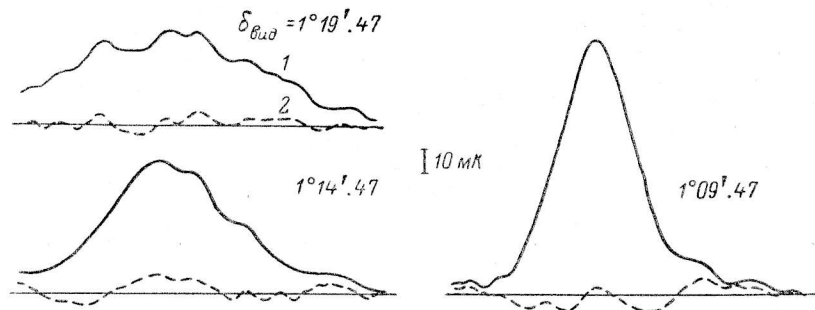


Рис. 3. «Квазидвумерный» гаусс-анализ. Кривые прохождения источника RS (1801+01) на волне 7.6 см при разных видимых склонениях.

1, 2 — остаточные невязки после «квазидвумерного» гаусс-анализа.

точные погрешности чистки фона. Чтобы приведенные в табл. 2 значения M -функции вполне соответствовали реальности, их следует, вероятно, уменьшить примерно в 2 раза, чтобы учесть оба упомянутых выше эффекта.

3.3. Двумерный анализ изображения с учетом реальной диаграммы. Все сказанное выше нетрудно обобщить на случай реальной диаграммы, заданной в виде таблицы чисел. В этом случае частные производные в матрице условных уравнений находят численным дифференцированием по таблице, что не представляет принципиальных трудностей и требует лишь мощного компьютера и развитого математического обеспечения.

Заключение. В заключение, подводя итоги всему сказанному выше, отметим, что общепринятые и хорошо апробированные стандартные процедуры, такие как двумерный гаусс-анализ и двумерная чистка, трудно применить к наблюдениям, выполненным на РАТАН-600, так как в этих наблюдениях граничные условия по склонению практически никогда не выполняются, поскольку область обзора по склонению, как правило, сравнима с размером вертикальной диаграммы направленности. При выполнении обзоров, например, с эффективной полосой $\Delta h \approx 20$ мин. дуги больше половины всех наблюдаемых источников физически находится на краях обзора или вообще вне его полосы. Поэтому для успешной обработки наблюдений необходимо использовать вероятностный подход на основании моделей наблюдений, максимально использующих априорную информацию о диаграмме радиотелескопа и условиях наблюдений.

В заключение автор выражает признательность П. А. Фридману, В. Л. Горухову, М. Г. Ларионову, Б. Л. Ерухимову, В. Н. Черненкову за интересные дискуссии по проблемам обнаружения и параметризации при обработке результатов радиоастрономических обзоров.

Литература

1. Irwin M. J. Automatic analysis of crowded fields. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1985. 214. P. 575.
2. Брандт З. Статистические методы анализа наблюдений. М.: Мир, 1975. 151 с.
3. Темирова А. В. Экспериментальное исследование диаграмм направленности Южного сектора РАТАН-600 с перископическим отражателем // Астрофиз. исслед. (Изд. САО). 1985. 19. С. 101.
4. Пятунина Т. Б. Обзор плоскости Галактики в районе ассоциации СМа ОВ1/Р1 на волне 7.6 см с помощью РАТАН-600 // Астрон. журн. 1985. 62. С. 218.
5. Пятунина Т. Б. Обзор в районе S 68. Опыт автоматической обработки каталога // Астрофиз. исслед. (Изд. САО). 1988. 26.
6. Обработка наблюдений 29 источников каталога Дугласа, проведенных в режиме неподвижного фокуса на 5 сечениях с помощью Северного сектора РАТАН-600 в декабре 1986 и январе 1987 года / К. Д. Алиакберов, Н. Н. Бурсов, О. В. Верходанов и др. Спец. Астрофиз. Обс. Науч. отчет, 1987.
7. Большой Пулковский радиотелескоп / С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Н. А. Есепкина, О. Н. Шиврис // Изв. ГАО. 1964. № 164. С. 3.
8. Применение метода сечений по склонению для определения параметров источников в режиме неподвижный фокус на РАТАН-600 / Н. Н. Бурсов, О. В. Верходанов, Б. Л. Ерухимов и др. // Астрофиз. исслед. (Изд. САО). 1989. 28.
9. Темирова А. В. Экспериментальное исследование диаграмм направленности Северного сектора радиотелескопа РАТАН-600 // Астрофиз. иссл. (Изд. САО). 1983. 17. С. 131.
10. Результаты обработки наблюдений эксперимента «Холод» (РАТАН-600, $\lambda=7.6$ см) в интервале прямых восхождений 9^h-13^h и 4^h / Н. Н. Бурсов, Н. М. Липовка, Т. Б. Пятунина и др. // Астрофиз. исслед. (Изд. САО). 1989. 29.

Поступила в редакцию 12 мая 1988 г.