

## ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ УДАЛЕННЫХ ГЕТЕРОДИНОВ

А. Ф. Дравских

Показано, что в РСДБ при синтезировании эффективно широкой полосы частот положение отклика на оси времени отличается от такового для несинтезированной полосы. Различие их положений пропорционально накопленной разности фаз гетеродинов (стандартов частоты). Это дает возможность с помощью двухэлементного интерферометра наблюдением точечного радиосточника с непрерывным спектром излучения оценить разность фаз гетеродинов и организовать фазовую автоподстройку их частоты.

It is shown time axis positions of the VLBI responses for the synthesised and not synthesised bandwidths are different. This time difference is proportional to the accumulated phase difference of the local oscillators (frequency standards). This phenomenon opens the possibility to evaluate the phase difference of the local oscillators and to organise their phaselock control by observing only one point wideband radio source.

В связи с потребностями радиоастрометрии в радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ) синтезируют эффективно широкую полосу частот, чтобы улучшить разрешающую способность интерферометра, измеряющего временную задержку.

В настоящее время известно два способа синтеза, заметно отличающихся как по технике синтезирования, так и по достигаемым результатам.

Первым появился и получил достаточно широкое распространение способ Роджерса [1]. В этом способе при полосе частот регистрации шириной  $\Delta f$  синтезируется широкая эффективная полоса  $\Delta F$  с пропускками (рис. 1). Распределение полос по спектру не обязательно равномерное. На рисунке:  $P$  — спектральная плотность потока принимаемого излучения,  $f$  — частота,  $\Delta F$  — синтезированная полоса,  $\Delta f$  — полоса регистрации,  $\Delta f_p$  — расстояние по частоте между каналами. Такая синтезированная полоса позволяет получить интерференционный отклик, состоящий из совокупности узких откликов, амплитуды которых спадают (при цифровой однобитовой регистрации) по закону  $\sin x/x$  (рис. 2, б). При обработке удастся выделить узкий отклик с максимальной амплитудой и таким образом оценить временную задержку  $\tau$  с точностью до ширины этого узкого отклика.

Второй способ опубликован в [2], это синтез полностью заполненной полосы путем ее свертывания, т. е. многократного гетеродинирования с использованием обоих зеркальных каналов (рис. 1, б).

На рис. 2 показаны отклики интерферометров с прямоугольной формой полосы регистрации  $\Delta f$ :

а — без синтеза полосы;

б — для синтеза Роджерса с равномерным распределением принимаемых полос  $\Delta f$  по полосе синтеза  $\Delta F$ ;

в — для синтеза свертыванием.

На рисунке:  $R(\tau_c)$  — отклик,  $\tau$  — временная задержка,  $t$  — текущее время.

Выражения для откликов а—в представлены соответственно выражениями (1)—(3):\*

$$R(\tau_c) = R_0 \frac{\sin \pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)} \cdot 1 \cos \omega_{н1} \tau^n, \quad (1)$$

\* Выражение (1) можно взять из [1], выражения (2), (3) выводятся в приложениях.

где  $R_0$  — коэффициент, характеризующий уровень сигнала отклика;  $\tau$  — временная задержка (измеряемая величина);  $\tau''$  — некая временная задержка, отличная от  $\tau$ ;  $\tau_c$  — грубая компенсирующая задержка, дискретно вводимая отрезками  $\Delta\tau_c = 1/2\Delta f$ ,  $\omega_{н1}$  — круговая частота гетеродина первого пункта;

$$R(\tau_c) = R_0 \frac{\sin \pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)} \cdot \frac{\sin N \pi \Delta f_p (\tau'' - \tau_{c1})}{\sin \pi \Delta f_p (\tau'' - \tau_{c1})} \cos \omega_{н1} (\tau'' - \tau_{c1}), \quad (2)$$

где  $\tau_{c1}$  — точная компенсирующая задержка, вводимая отрезками  $\Delta\tau_{c1} = 1/2\Delta F$ ;  $\omega_{н1}$  — среднее значение круговой частоты гетеродинов первого пункта;  $N$  — число каналов (гетеродинов);

$$R(\tau_c) = R_0 \frac{\sin 2\pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{2\pi \Delta f (\tau - \tau_c)} \cdot \frac{\sin 2^{N-1} 2\pi \Delta f \tau'}{\sin 2\pi \Delta f \tau'} \cdot \cos \omega_{н1} \tau', \quad (3)$$

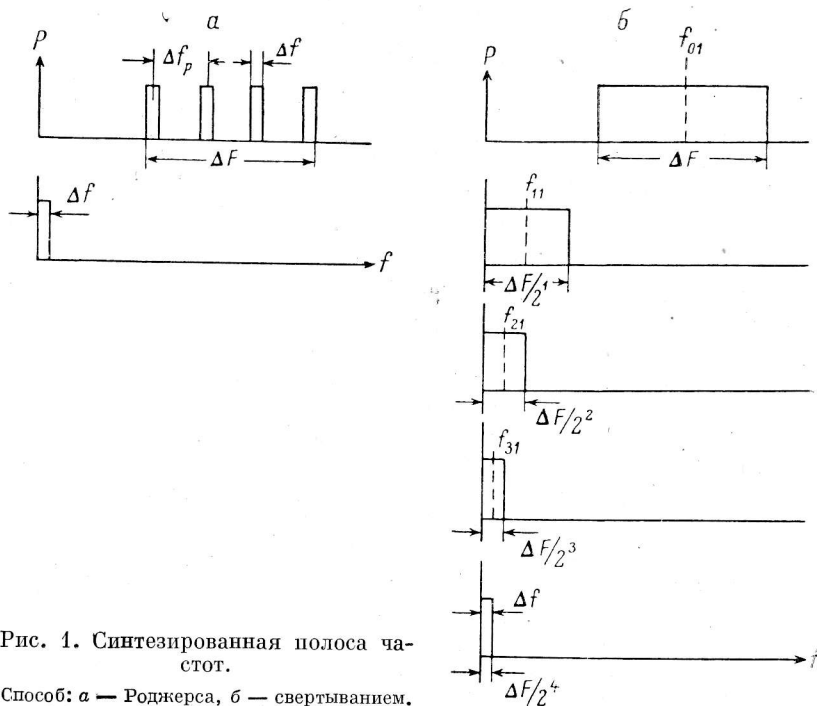


Рис. 1. Синтезированная полоса частот.

Способ: а — Роджерса, б — свертыванием.

где  $\tau'$  — некая временная задержка, отличная от  $\tau$  и немного от  $\tau''$ ;  $\omega_{н1}$  — круговая частота первого гетеродина, первого пункта;  $N$  — число гетеродинов при свертывании полосы.

Выражения (1)–(3) намеренно представлены одинаковым числом множителей. Первый множитель и последний — собственно интерференционный сигнал — играют одинаковую роль во всех откликах. Вторым множителем с точностью до коэффициента 2 везде одинаков, он отражает крупномасштабную структуру отклика, обусловленную конечной шириной полосы регистрации. Существенные отличия связаны с третьим множителем, отражающим мелкомасштабную структуру интерференционного отклика, обусловленную синтезом полосы. В случае без синтеза (1) мелкомасштабной структуры нет, множитель равен единице. При наличии синтеза, (2) или (3), третий множитель определяет число узких откликов, располагающихся внутри крупномасштабной огибающей, в зависимости от структуры синтезируемой полосы.

**Возможность сращения фаз гетеродинов интерферометра.** Суть предлагаемой возможности заключена в различии временных задержек  $\tau$  и  $\tau''$  или  $\tau'$ . Приведем выражения, отражающие их содержание:

$$\tau = \tau_r + \tau_{ат} + \tau_{ан} + \tau_q + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} t;^* \quad (4)$$

\* Последний член предполагает, что ход часов аппроксимируется линейной функцией, как это принимается в большинстве случаев.

$$\tau'' = \tau + \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} t + \frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{\omega_{n1}} + \frac{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\omega_{n1}}; \quad (5)$$

$$\tau' = \tau + \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} t + \frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{\omega_{n1}}, \quad (6)$$

где  $\tau_r$  — собственно геометрическая задержка;  $\tau_{ат}$  — задержка, обусловленная атмосферой;  $\tau_{ап}$  — задержка, связанная с аппаратурой;  $\tau_ч$  — ошибка сличения нуль-пунктов шкал часов;  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1}$  — относительная разность частот стандартов двух пунктов;  $\frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}}$  — относительная разность частот гетеродинов двух пунктов;  $\frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{\omega_{n1}}$  — задержка, обусловленная разностью фаз гетеродинов;  $\frac{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\omega_{n1}}$  — знакопеременная задержка, присущая методам с дискретной компенсацией геометрической задержки и однополосным приемом;  $t$  — текущее время, отсчитываемое от начала сеанса наблюдения.

Если учесть, что  $\frac{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\omega_{n1}} < 10^{-10}$  с, а в среднем за время  $t$  и в максимуме широкой огибающей отклика равен нулю, то можно считать, что  $\tau'' = \tau'$ . Однако все дальнейшие рассуждения более строго подходят для синтеза свертыванием.

При наблюдениях радиоисточников в РСДБ без синтеза полосы измеряется, так сказать, истинная задержка  $\tau$  (4) подбором  $\tau_c$ , а с синтезом — сумма истинной задержки и накопленной разности фаз гетеродинов  $\tau'$  (6) (при синтезе Роджерса  $\tau'' \approx \tau'$  измеряется подбором  $\tau_{c1}$ , а при синтезе свертыванием — измерением момента  $t$ , в который имеет место равенство  $\tau' = \tau_c$  [2]).

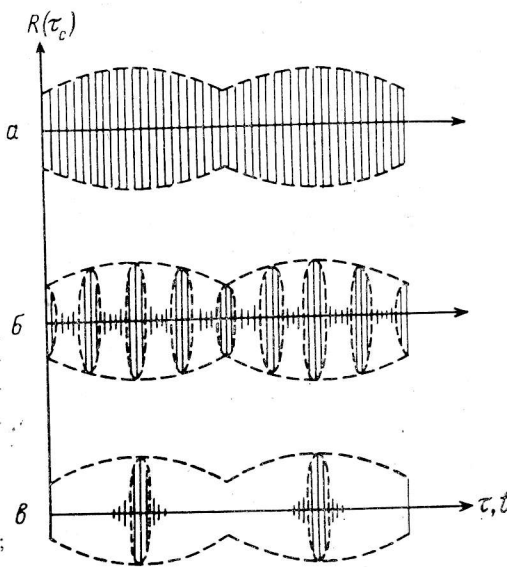


Рис. 2. Отклики интерферометра.

а — без синтеза полосы; б — при синтезе Роджерса; в — при синтезе свертыванием.

Это обстоятельство составляет принципиальное отличие синтезированного РСДБ от несинтезированного, и его следует учитывать. Так, если расстройка частот гетеродинов не производилась, то  $\frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1}$ , и если пренебречь в (6) членом  $\frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{\omega_{n1}} \leq \frac{1}{f_{n1}} \approx 10^{-10}$  с, то

$$\tau' = \tau_r + \tau_{ат} + \tau_{ап} + \tau_ч + 2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} t. \quad (7)$$

Если обозначить вводимую (иногда) расстройку частот гетеродинов на пунктах  $\Delta\omega_n/\omega_{n1}$ , то

$$\tau' = \tau_r + \tau_{ат} + \tau_{ап} + \tau_ч + \left( 2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} + \frac{\Delta\omega_n}{\omega_{n1}} \right) t. \quad (8)$$

При дифференциальных измерениях ( $\tau' - \tau$ ) можно получить разность фаз и разность частот гетеродинов, не зависящие от эффектов распространения, аппаратных эффектов и ошибок сличения шкал:

$$\tau' - \tau = \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} t + \frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{\omega_{n1}}. \quad (9)$$

Очевидно, если в частоты гетеродинов не вводилась намеренно расстройка, то  $\frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1}$ , и все дальнейшие рассуждения имеют отношение и к стандартам частоты.

Из рис. 3, иллюстрирующего дифференциальные измерения задержки с помощью интерферометра, реализующего одновременно прием без синтеза и с синтезом полосы, видно, что

$$\tau_{m'} - \tau_m = \frac{t_{m'} - t_m}{T_0} \cdot \frac{1}{2\Delta f}. \quad (10)$$

В точке  $t_m$  (точка широкого максимума)  $\tau_m = \tau_c$ , в точке  $t_{m'}$  (точка узкого максимума)  $\tau_{m'} = \tau_c$ , т. е. в точке  $t_{m'}$   $\tau_{m'} = \tau_m$ , тогда из (6) имеем  $\tau_{m'} = \tau_m - \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} t_{m'} + \frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{\omega_{n1}}$ . Учитывая (10), получим

$$\frac{t_m - t_{m'}}{T_0} \cdot \frac{1}{2\Delta f} = \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} t_{m'} + \frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{\omega_{n1}}, \quad (11)$$

причем выражение слева — экспериментально измеряемые величины.

Периоды следования широких максимумов (по  $\tau$ ) и  $\tau'_0$  — узких (по  $\tau'$ ) равны между собой; тогда из (6) получим

$$\tau'_0 = \tau_0 = \Delta\tau + \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} \Delta t, \quad (12)$$

где  $\Delta\tau$  — период следования узких импульсов по  $\tau$ ;  $\Delta t$  — период следования узких импульсов по  $t$ . Замечаем, что

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{\tau_0}{T_0}, \quad (13)$$

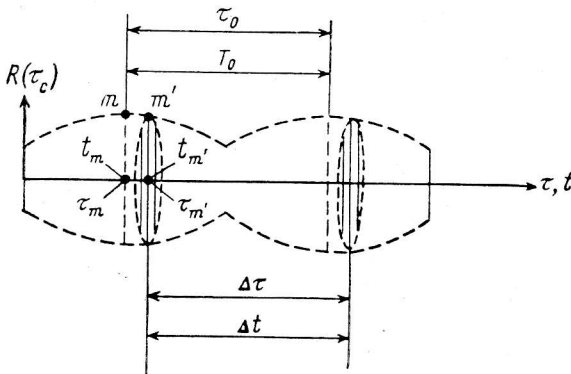


Рис. 3. Дифференциальные измерения задержки с синтезированной и несинтезированной полосой частот.

(поскольку между  $t$  и  $\tau$  на коротком интервале времени имеется однозначное соответствие). Из (9)—(13) можно получить следующие три относительные характеристики гетеродинов на пунктах: относительную разность частот

$$n = \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}} = \tau_0 \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{T_0} \right); \quad (14)$$

накопленную разность фаз (в периодах)

$$m = \frac{(\omega_{n2} t_m + \varphi_{n2}) - (\omega_{n1} t_m + \varphi_{n1})}{2\pi} = f_{n1} \frac{\tau_0}{T_0} (t_m - t_{m'}), \quad (15)$$

где  $f_{n1}$  — частота гетеродина первого пункта, и начальную разность фаз гетеродинов

$$\mu = \frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{2\pi} = f_{n1} \tau_0 \left( \frac{t_m}{T_0} - \frac{t_{m'}}{\Delta t} \right). \quad (16)$$

$n$ ,  $m$  и  $\mu$  определяются через экспериментально измеряемые величины. Очевидно, при наличии линии передачи между пунктами интерферометра (например, через геостационар) и обработке наблюдений в реальном масштабе времени можно организовать синхронизацию гетеродинов.

**Ошибки измерения и регулирования частоты и фазы удаленных гетеродинов.** Из (14) легко получить ошибку измерения  $n$ :

$$\delta n = \pm \sqrt{\left( \frac{\delta \tau_0}{\tau_0} \right)^2 \left[ \frac{\tau_0}{\Delta t} - \frac{\tau_0}{T_0} \right]^2 + \left( \frac{\delta T_0}{T_0} \right)^2 \left( \frac{\tau_0}{T_0} \right)^2 \left( \frac{\delta \Delta t}{\Delta t} \right)^2 \left( \frac{\tau_0}{\Delta t} \right)^2}, \quad (17)$$

где знаком  $\delta$  обозначены ошибки соответствующих величин. Учтя, что

$$\Delta t \approx T_0; \left(\frac{\delta T_0}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \delta\tau(\Delta f)}{\tau_0}\right)^2; \left(\frac{\delta\Delta t}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \delta\tau(\Delta F)}{\Delta\tau}\right)^2,$$

где  $\delta\tau(\Delta f)$  и  $\delta\tau(\Delta F)$  — ошибки измерения временной задержки без синтеза и с синтезом полосы соответственно, а также, что

$$\left|\frac{\delta\tau_0}{\tau_0}\right| = \left|\frac{\delta f}{f}\right| \ll 10^{-12} \ll \left|\frac{\delta\tau(\Delta F)}{\Delta\tau}\right| \ll \left|\frac{\delta\tau(\Delta f)}{\tau_0}\right|,$$

где  $\delta f/f$  — нестабильность частоты стандартов (гетеродинов), получим

$$\delta n \approx \pm \sqrt{2} \frac{\delta\tau(\Delta f)}{T_0}.$$

Учитывая далее, что

$$\begin{aligned} \delta\tau(\Delta f) &\approx \frac{T_m}{T_c} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\Delta ft}} \cdot \frac{1}{\Delta f\pi}; \\ \frac{\tau_0}{T_0} &\approx \frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{\Omega}{c} e \cos \delta \cdot \sin h; \\ \tau_0 &= \frac{1}{2\Delta f}, \end{aligned}$$

где  $T_m/T_c$  — отношение шум/сигнал;  $t$  — время когерентного накопления;  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\sim 1.16 \cdot 10^{-5}$  об/с;  $c$  — скорость света;  $e$  — экваториальная проекция базы;  $\delta$  — склонение источника;  $h$  — часовой угол источника относительно меридиана базы, получим

$$\delta n \approx \pm \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{T_m}{T_c} \frac{\Omega e \cos \delta \cdot \sin h}{c \sqrt{\Delta ft}}. \quad (18)$$

Из (15) получим ошибку измерения  $m$ :

$$\begin{aligned} \delta m &= \pm f_{n1} \frac{\tau_0}{T_0} \sqrt{\left(\frac{\delta f_{n1}}{f_{n1}}\right)^2 (t_m - t_{m'})^2 + \left(\frac{\delta\tau_0}{\tau_0}\right)^2 (t_m - t_{m'})^2 + \dots} \rightarrow \\ &+ \leftarrow \dots \left(\frac{\delta T_0}{T_0}\right)^2 (t_m - t_{m'})^2 + (\delta t_m)^2 + (\delta t_{m'})^2. \end{aligned}$$

Учитывая те же замечания, что и при выводе (18), а также, что

$$(\delta t_m)^2 = \frac{1}{2} (\delta T_0)^2; |t_m - t_{m'}| \ll T_0 \text{ и } |\delta t_{m'}| \ll |\delta t_m|,$$

получим

$$\delta m = \pm f_{n1} \delta\tau(\Delta f) = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{T_m}{T_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta ft}} \cdot \frac{f_{n1}}{\Delta f}. \quad (19)$$

Из (16) при упомянутых выше замечаниях получим

$$\delta\mu = \pm f_{n1} \delta\tau(\Delta f) \sqrt{1 + 2\left(\frac{t_m}{T_0}\right)}. \quad (20)$$

Значение  $t_m \approx \frac{t}{2}$ ; тогда при  $t < T_0$ ,  $\delta\mu = \delta m$ . Однако  $T_0 \approx 0.1$  с, и при  $t < T_0$  ошибка  $\delta\mu$  (19) будет очень большой. Реально  $t \gg t_0$ , и тогда

$$\delta\mu = \pm \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{T_m}{T_c} \cdot \frac{\Omega e}{c} \cos \delta \cdot \sin h \sqrt{\frac{t}{\Delta f}} f_{n1}. \quad (21)$$

При значениях  $f_{n1} = 5 \cdot 10^9$  Гц,  $\Delta f = 10^7$  Гц,  $T_m/T_c = 10$ ,  $t = 10^2$  с и  $e \cos \delta \cdot \sin h = 10^8$  см, получим  $\delta n = \pm 1.35 \cdot 10^{-11}$ ,  $\delta m = \pm 0.062$  пер. =  $\pm 22^\circ$ ,  $\delta\mu = \pm 3.37$  пер., т. е. относительная разность частот  $n$  и начальная разность фаз гетеродинов  $\mu$  определяются весьма грубо, в то время как накопленная разность фаз гетероди-

нов  $m$  измеряется с достаточной для целей астрометрии и построения изображений точностью.

При организации фазовой автоподстройки частоты гетеродинов или при восстановлении фаз гетеродинов вне режима реального времени для использования предлагаемой методики необходимо, чтобы взаимная кратковременная нестабильность используемых стандартов частоты при времени накопления не более  $t \frac{\delta f}{f} \Big|_t$  была не хуже  $\frac{\delta m/t}{t}$ . Для случая, отвечающего примеру, необходимо  $\frac{\delta f}{f} \Big|_{100 \text{ с}} \ll 1.24 \cdot 10^{-13}$  или нестабильность каждого из гетеродинов  $\frac{\delta f}{f} \Big|_{100 \text{ с}} \leq 8.7 \cdot 10^{-14}$ . Это соответствует уровню нестабильности современных водородных стандартов частоты.

**Заключение.** Показано, что с помощью двухэлементного интерферометра со сверхдлинной базой, измеряющего временную задержку и реализующего прием без синтеза и с синтезом полосы одновременно, можно осуществить измерение разности фаз удаленных гетеродинов (стандартов) путем наблюдения достаточно яркого радиоисточника малого углового размера с непрерывным спектром излучения, а при наличии соответствующей линии связи организовать весьма эффективную фазовую автоподстройку их частоты. Это обстоятельство можно использовать для синхронизации удаленных часов с точностью  $\delta m/f \approx 10^{-11}$  с и взаимной долговременной фазовой стабилизации гетеродинов. Эффективность не зависит от среды распространения радиоволн.

Автор выражает признательность П. А. Фридману за плодотворную критику и помощь.

## Приложение 1

### ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ОТКЛИКА ИНТЕРФЕРОМЕТРА СО СВЕРХДЛИННОЙ БАЗОЙ С СИНТЕЗОМ ПОЛОСЫ СВЕРТЫВАНИЕМ

В статье [2], описывающей синтез свертыванием, допущены некоторые упрощения, которые привели к полной потере небольшого эффекта, отражающего принципиальную разницу в измеряемых временных задержках при синтезе и без синтеза полосы. Здесь мы приведем полный вывод выражения отклика. Предполагается, что читателю знакома работа [2].

Найдем корреляционный отклик интерферометра с синтезом полосы свертыванием. Обозначим входной сигнал на первом пункте РСДБ через  $x(t)$ , его спектр  $\tilde{x}(\omega)$ , тогда входной сигнал на втором пункте, куда он приходит с запаздыванием в соответствии с рис. 4, запишется  $x(t - \tau)$ , а его спектр  $\tilde{x}(\omega) e^{-j\omega\tau}$ , где  $\tau$  — задержка сигнала. Причем

$$\tau = \tau_r + \tau_{ат} + \tau_{ан} + \tau_{ч} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} t. \quad (\text{П}1.1)$$

Задержка складывается из геометрической задержки  $\tau_r$ , смещения нуль-пунктов шкал времени  $\tau_{ч}$  ( $\tau_{ч}$  — положительна, если часы на пункте 2 показывают большее время, т. е. информация о сигнале с пункта 2, считываемая по этим часам, запаздывает; она — о более раннем событии), линейного члена хода часов  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} t$  [если частота стандарта на пункте 2 ( $\omega_2$ ) выше, чем на пункте 1 ( $\omega_1$ ), то часы спешат и, значит, с их помощью получают информацию о более ранних моментах сигнала, т. е. информация запаздывает] и задержек в аппаратуре и атмосфере.

Будем считать, что круговые частоты гетеродинов выбраны по следующим правилам: частота первого гетеродина  $\omega_{01}$  равна средней частоте в спектре входного сигнала, занимающего полосу шириной  $\Delta\omega_M$ , частота каждого следующего гетеродина

$$\omega_{i1} = \frac{\Delta\omega_M}{2^{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (\text{П}1.2)$$

где  $N$  — число гетеродинов (гетеродинирований). Число гетеродинирований выбирается из условия

$$\frac{\Delta\omega_M}{2^N} = \Delta\omega, \quad (\text{П}1.3)$$

где  $\Delta\omega$  — ширина полосы регистрации «свернутого» сигнала.

Гетеродинные сигналы на первом пункте запишем в виде

$$H_{01}(t) = \cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}) = \cos \omega_{01} \left( t + \frac{\varphi_{01}}{\omega_{01}} \right);$$

$$H_{i1}(t) = \cos(\omega_{i1}t + \varphi_{i1}) = \cos \omega_{i1} \left( t + \frac{\varphi_{i1}}{\omega_{i1}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (\text{П}1.4)$$

где  $\omega_{01}, \omega_{i1}$  — частоты;  $\varphi_{01}, \varphi_{i1}$  — начальные фазы гетеродинов первого пункта. Считаем гетеродины синхронизированными так, что

$$\begin{aligned} \varphi_{N-2,1} &= 2\varphi_{N-1,1}; \quad \dots \\ \dots \varphi_{11} &= 2^{N-2}\varphi_{N-1,1} \quad \text{или} \quad \varphi_{i1} = 2^{N-(i+1)}\varphi_{N-1,1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (\text{П}1.5)$$

Аналогичные соотношения наблюдаются между фазами гетеродинов и на втором пункте. В сигналах гетеродинов нет необходимости учитывать смещение нуль-пунктов шкал времени, поскольку гетеродины когерентны, а начальные фазы гетеродинов включают в себя любые начальные рассинхронизации. Тогда спектры гетеродинных сигналов будут

$$\tilde{H}_{01}(\omega) = \frac{1}{2} \{ \delta(\omega - \omega_{01}) + \delta(\omega + \omega_{01}) \} e^{j\omega \frac{\varphi_{01}}{\omega_{01}}}, \quad (\text{П}1.6)$$

$$H_{i1}(\omega) = \frac{1}{2} \{ \delta(\omega - \omega_{i1}) + \delta(\omega + \omega_{i1}) \} e^{j\omega \frac{\varphi_{i1}}{\omega_{i1}}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $\delta(\omega \pm \omega_i)$  — дельта-функции.

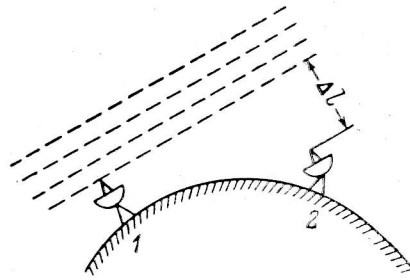


Рис. 4. К приложению.

$$\Delta l/c = \tau_r.$$

Спектр преобразованного сигнала представляет собой свертку спектров входного сигнала и гетеродина. После первого гетеродинирования будем иметь спектр сигнала

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{01}(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \delta(\nu - \omega_{01}) + \delta(\nu + \omega_{01}) \} e^{j\nu \frac{\varphi_{01}}{\omega_{01}}} \tilde{x}(\omega - \nu) d\nu = \\ &= \frac{1}{2} \{ \tilde{x}(\omega - \omega_{01}) e^{j\varphi_{01}} + \tilde{x}(\omega + \omega_{01}) e^{-j\varphi_{01}} \}. \end{aligned}$$

После второго гетеродинирования ( $i=1$ ) спектр сигнала будет

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{11}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\nu) \tilde{x}_{01}(\omega - \nu) d\nu = \frac{1}{2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \delta(\nu - \omega_{11}) + \delta(\nu + \omega_{11}) \} e^{j\nu \frac{\varphi_{11}}{\omega_{11}}} \times \\ &\times \{ \tilde{x}(\omega - \nu - \omega_{01}) e^{j\varphi_{01}} + \tilde{x}(\omega - \nu + \omega_{01}) e^{-j\varphi_{01}} \} d\nu = \frac{1}{2^2} \{ \tilde{x}(\omega - \omega_{11} - \omega_{01}) e^{j(\varphi_{11} + \varphi_{01})} + \\ &+ \tilde{x}(\omega - \omega_{11} + \omega_{01}) e^{j(\varphi_{11} - \varphi_{01})} + \tilde{x}(\omega + \omega_{11} - \omega_{01}) e^{j(-\varphi_{11} + \varphi_{01})} + \tilde{x}(\omega + \omega_{11} + \omega_{01}) e^{j(-\varphi_{11} - \varphi_{01})} \}. \end{aligned}$$

Число слагаемых в спектре преобразованного сигнала равно  $2^N$ . В аргументах каждого члена присутствуют частоты и фазы всех гетеродинов. Знаки фаз в каждом члене обратны знакам частот. Легко показать, что спектр сигнала, преобразованного  $N$  раз с помощью гетеродинов с номерами  $n$  от 0 до  $N-1$ , можно записать

$$\tilde{x}_{N-1,1}(\omega) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{(2^N-1)} \tilde{x}_k \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n1} \right) e^{-j \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \varphi_{n1}}, \quad (\text{П}1.7)$$

где  $\left[ \frac{k}{2^n} \right]$  обозначает целую часть отношения  $\left[ \frac{k}{2^n} \right]$ .

Для второго пункта после первого преобразования получим спектр сигнала

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{02}(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \delta(\nu - \omega_{02}) + \delta(\nu + \omega_{02}) \} e^{j\nu \frac{\varphi_{02}}{\omega_{02}}} \tilde{x}(\omega - \nu) e^{-j(\omega - \nu)\tau} d\nu = \\ &= \frac{1}{2} \{ \tilde{x}(\omega - \omega_{02}) e^{-j(\omega - \omega_{02})\tau} e^{j\varphi_{02}} + \tilde{x}(\omega + \omega_{02}) e^{-j(\omega + \omega_{02})\tau} e^{-j\varphi_{02}} \}. \end{aligned}$$

После второго преобразования получим спектр

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{12}(\omega) = & \frac{1}{2^2} \left\{ \tilde{x}(\omega - \omega_{12} - \omega_{02}) e^{-j(\omega - \omega_{12} - \omega_{02})\tau} e^{j(\varphi_{12} + \varphi_{02})} + \right. \\ & + \tilde{x}(\omega - \omega_{12} + \omega_{02}) e^{-j(\omega - \omega_{12} + \omega_{02})\tau} e^{j(\varphi_{12} - \varphi_{02})} + \\ & + \tilde{x}(\omega + \omega_{12} - \omega_{02}) e^{-j(\omega + \omega_{12} - \omega_{02})\tau} e^{j(-\varphi_{12} + \varphi_{02})} + \\ & \left. + \tilde{x}(\omega + \omega_{12} + \omega_{02}) e^{-j(\omega + \omega_{12} + \omega_{02})\tau} e^{j(-\varphi_{12} - \varphi_{02})} \right\}. \end{aligned}$$

Анализируя последнее выражение, легко написать выражение для спектра сигнала, преобразованного  $N$  раз, аналогичное выражению (П1. 7):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{N-1,2}(\omega) = & \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \tilde{x}_k \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n2} \right) \times \\ & \times e^{-j \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n2} \right) \tau} e^{-j \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \varphi_{n2}} \end{aligned} \quad (\text{П1. 8})$$

Взаимный спектр преобразованных  $N$  раз сигналов двух пунктов представляет собою статистическое среднее от произведения спектра (П1. 7) и сопряженной величины (П1. 8):

$$\tilde{x}_{12}^2(\omega) = \langle \tilde{x}_{N-1,1}(\omega) \tilde{x}_{N-1,2}^*(\omega) \rangle, \quad (\text{П1. 9})$$

где треугольные скобки обозначают статистическое среднее, а звездочка — сопряженную величину. Поскольку когерентны только одноименные составляющие спектра на пунктах 1 и 2, то среднее произведения (П1. 9) будет состоять из суммы средних произведений одноименных членов:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{12}^2(\omega) = & \frac{1}{2^{2N}} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left\langle \tilde{x}_k \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n1} \right) \tilde{x}_k^* \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n2} \right) \right\rangle \times \\ & \times e^{j \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n2} \right) \tau} e^{-j \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} (\varphi_{n2} - \varphi_{n1})} \end{aligned}$$

Очевидно, произведение одноименных сопряженных составляющих спектра разных пунктов можно заменить произведением одноименных сопряженных составляющих одного пункта, например первого:

$$\begin{aligned} & \left\langle \tilde{x}_k \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n1} \right) \tilde{x}_k^* \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n2} \right) \right\rangle e^{j \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n2} \right) \tau} = \\ = & \left\langle \tilde{x}_k \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n1} \right) \tilde{x}_k^* \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n1} \right) \right\rangle e^{j \left( \omega + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} \omega_{n1} \right) \tau} \times \\ & \times e^{j \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{[k/2^n]} (\omega_{n2} - \omega_{n1}) \tau} \end{aligned}$$

Обозначим последнее выражение в треугольных скобках  $\langle \tilde{x}_k^2 \rangle$ , а  $(-1)^{[k/2^n]}$  через  $S_n^k$ , символизирующее зависимость знака от  $k$  и  $n$ ; тогда общее выражение для взаимного спектра  $N$  раз свернутого сигнала будет:

$$\tilde{x}_{12}^2(\omega) = \frac{1}{2^{2N}} \sum_{k=0}^{2^N-1} \langle \tilde{x}_k^2 \rangle e^{j\omega\tau} e^{j \sum_{n=0}^{N-1} S_n^k [\omega_{n2} - (\omega_{n2} - \omega_{n1}) \tau + (\varphi_{n2} - \varphi_{n1})]} \quad (\text{П1. 10})$$

Корреляционная функция, т. е. отклик интерферометра, может быть получена преобразованием Фурье от взаимного спектра:

$$R(\tau_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_{12}^2(\omega) e^{j\omega\tau_c} d\omega. \quad (\text{П1. 11})$$

Считаем спектральную плотность сигнала  $\langle \tilde{x}_k^2 \rangle$  не зависящей от частоты, а форму полос пропускания всех преобразователей частоты прямоугольной, тогда  $\langle \tilde{x}_k^2 \rangle = \text{const} =$



$\langle \hat{x}^2 \rangle$ . Если учесть, что выходная полоса ограничена полосой частот  $0-\Delta\omega$ , то пределы интегрирования в (П1.11) можно заменить на  $-\Delta\omega, +\Delta\omega$ . После интегрирования получим

$$R(\tau_c) = \frac{\sigma^2}{2^{2N-1}} \cdot \frac{\sin \Delta\omega(\tau - \tau_c)}{\Delta\omega(\tau - \tau_c)} \sum_{n=0}^{2^N-1} e^{-j \sum_{n=0}^{N-1} s_n^k \alpha_n}, \quad (\text{П1.12})$$

где  $\sigma^2 = \frac{\langle \hat{x}^2 \rangle \Delta\omega \cdot 2}{2\pi}$  — дисперсия сигнала в полосе видеочастот  $\Delta\omega$ ;

$$\alpha_n = [\omega_{n1}\tau + (\omega_{n2} - \omega_{n1})t + (\varphi_{n2} - \varphi_{n1})]. \quad (\text{П1.13})$$

Если учесть соотношения между частотами гетеродинов (П1.2), (П1.3) и их фазами (П1.5), будем иметь

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1} = 2^{N-(n+1)}\alpha_{N-1} \equiv 2^{N-(n+1)}\alpha, \quad (\text{П1.14})$$

где

$$\alpha \equiv \alpha_{N-1} = [\omega_{N-1,1}\tau + (\omega_{N-1,2} - \omega_{N-1,1})t + (\varphi_{N-1,2} - \varphi_{N-1,1})]. \quad (\text{П1.15})$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2^N-1} e^{j \sum_{n=0}^{N-1} s_n^k \alpha_n} &= 2^N \cos \alpha_0 \cdot \cos \alpha_1 \dots \cos \alpha_{N-2} \cdot \cos \alpha_{N-1} = \\ &= 2^N \cos \alpha_0 \cdot \cos 2^{N-2}\alpha \cdot \cos^{N-3}\alpha \dots \cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cos \alpha_0 \frac{\sin 2^{N-1}\alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (\text{П1.16})$$

Подставив (П1.16) в (П1.12), получим окончательное выражение для корреляционной функции, т. е. отклика интерферометра с синтезом полосы свертыванием ее путем  $N$  гетеродирования:

$$R(\tau_c) = \frac{\sigma^2}{2^{2N-1}} \cdot \frac{\sin \Delta\omega(\tau - \tau_c)}{\Delta\omega(\tau - \tau_c)} \cdot \frac{\sin 2^{N-1}\alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha_0. \quad (\text{П1.17})$$

Вынеся в (П1.15)  $\omega_{N-1,1}$  за скобки и учтя, что  $\omega_{N-1,1} = 2\pi\Delta f$ , получим

$$\alpha = 2\pi\Delta f\tau', \quad (\text{П1.18})$$

где

$$\tau' = \tau + \frac{\omega_{N-1,2} - \omega_{N-1,1}}{\omega_{N-1,1}}t + \frac{\varphi_{N-1,2} - \varphi_{N-1,1}}{\omega_{N-1,1}} = \tau + \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{\omega_{n1}}t + \frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{\omega_{n1}}, \quad (\text{П1.19})$$

где  $\omega_{n1}, \omega_{n2}$  обозначены круговые частоты любых гетеродинов первого и второго пунктов соответственно. Выражение (П1.19) совпадает с выражением (6) статьи.

Если обозначить в (П1.17)

$$\frac{\sigma^2}{2^{2N-1}} = R_0$$

и учесть (П1.18) и (П1.19), то из (П1.17) получим выражение (3) статьи.

## Приложение 2

### ОТКЛИК РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРА С СИНТЕЗОМ ПОЛОСЫ МЕТОДОМ РОДЖЕРСА ПРИ РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ УЗКИХ ПОЛОС

Найдем отклик радиоинтерферометра с синтезом полосы методом Роджерса при равномерном распределении узких полос  $\Delta f$  внутри синтезируемой широкой полосы  $\Delta F$  (рис. 1, а). Предполагается, что синтез производится путем поочередного приема  $N$  узкополосных каналов радиоспектра, каждый шириной  $\Delta f$ , равной ширине полосы регистратора. Расстояние между соседними каналами  $\Delta f_p$ . Номера каналов выбраны  $k=0, 1, \dots, N-1$ .

Отклик несинтезированного интерферометра, соответствующий приему  $k$ -го канала, дается выражением [1]

$$R_k = R_0 \frac{\sin \pi\Delta f(\tau - \tau_c)}{\pi\Delta f(\tau - \tau_c)} \cos \omega_{k1}\tau'', \quad (\text{П2.1})$$

где  $\tau''$ , согласно (4) и (5), будет

$$\tau'' = \tau + \frac{\omega_{k2} - \omega_{k1}}{\omega_{k1}}t + \frac{\varphi_{k2} - \varphi_{k1}}{\omega_{k1}} + \frac{\pi\Delta f(\tau - \tau_c)}{\omega_{k1}}; \quad (\text{П2.2})$$

В соответствии с рис. 1, а

$$\begin{aligned}\omega_{k1} &= \omega_{01} + k\Delta\omega_p; \\ \omega_{k2} &= \omega_{02} + k\Delta\omega_p;\end{aligned}\quad (\text{П2.3})$$

$\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  — круговые частоты первых ( $k=0$ ) гетеродинов первого и второго пункта соответственно.

Синтезированный отклик формируется следующим образом. Отклик каждого канала гетеродинируется вспомогательным сигналом  $\cos \omega_{k1}\tau_{c1}$  и затем находится их сумма  $R_\Sigma$

$$R_\Sigma = \sum_{k=0}^{N-1} R_k \cos \omega_{k1}\tau_{c1}, \quad (\text{П2.4})$$

где чертой обозначено среднее за время наблюдения  $t$  и  $\tau_{c1}$  — точное сопровождение по задержке, осуществляемое дискретными шагами  $1/(2\Delta F)$ . Величина  $\tau_{c1}$  варьируется таким образом, чтобы максимизировать  $R_\Sigma$  на всем интервале наблюдения.

Подставляя (П2.1) в (П2.4), получим

$$R_\Sigma = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} R_0 \frac{\sin \pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)} \cos \omega_{k1} (\tau'' - \tau_{c1}).$$

Учитывая (П2.3), запишем

$$R_\Sigma = \frac{1}{2} R_0 \frac{\sin \pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)} \sum_{k=0}^{N-1} \cos [\omega_{01} (\tau'' - \tau_{c1}) + k\Delta\omega_p (\tau'' - \tau_{c1})]. \quad (\text{П2.5})$$

Заменяя сумму в (П2.5) в соответствии с [3, с. 43, выражение А (361.9)], получим

$$R_\Sigma = \frac{1}{2} R_0 \frac{\sin \pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)} \cdot \frac{\sin N \frac{\Delta\omega_p}{2} (\tau'' - \tau_{c1})}{\sin \frac{\Delta\omega_p}{2} (\tau'' - \tau_{c1})} \cos \left( \omega_{01} + \frac{N-1}{2} \Delta\omega_p \right) (\tau'' - \tau_{c1}).$$

Опуская несущественный в наших рассуждениях коэффициент  $1/2$ , заменяя  $\Delta\omega_p$  на  $2\pi\Delta f_p$ , учитывая, что  $\omega_{01} + \frac{N-1}{2} \Delta\omega_p = \omega_{n1}$  представляет собой среднее значение круговой частоты гетеродинов первого пункта, получим выражение

$$R_\Sigma = R(\tau_c) = R_0 \frac{\sin \pi \Delta f (\tau - \tau_c)}{\pi \Delta f (\tau - \tau_c)} \frac{\sin N \pi \Delta f_p (\tau'' - \tau_{c1})}{\sin \pi \Delta f_p (\tau'' - \tau_{c1})} \cos \omega_{n1} (\tau'' - \tau_{c1}), \quad (\text{П2.6})$$

совпадающее с (2).

### Литература

1. Rogers A. E. E. Very long baseline interferometry with large effective bandwidth for phase-delay measurements. — Radio Sci., 1970, 5, N 10, p. 1239—1247.
2. Гордеецкий В. М., Дравских А. Ф., Фридман П. А. О синтезе широкой полосы в радиоинтерферометре со сверхдлинной базой. — Изв. вузов. Радиофизика, 1981, 24, № 6, с. 655—665.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1108 с.

Поступила в редакцию 22.07.83.