

## ТРОПОСФЕРНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ТОЧНОСТЬ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ КООРДИНАТ В АСТРОНОМИИ

А. Ф. Дравских, А. А. Стоцкий, А. М. Финкельштейн, П. А. Фридман

В работе рассматривается влияние флуктуационных эффектов тропосферы на точность фазовых измерений координат. Исследуется характер осреднения тропосферных эффектов, если проводится  $N$  координатных измерений длительностью  $T$  с периодом  $\mu$ . Рассматриваются различные режимы осреднения в зависимости от соотношения различных временных параметров. Приведены формулы для учета корреляционных связей между отдельными наблюдениями. Показано, что интервал корреляции между отдельными наблюдениями всегда больше характерного для данной базы периода флуктуаций тропосферных неоднородностей.

The influence of tropospheric fluctuational effects on the accuracy of phase measurements of coordinates is considered. The character of averaging of tropospheric effects is investigated for  $N$  coordinate measurements of duration  $T$  with the period  $\mu$ . Different averaging modes are considered depending on the relation of different time parameters. Formulas are presented to allow for correlational relations between individual observations. It is shown that the interval of correlation between individual observations is always larger than the period of fluctuations of tropospheric inhomogeneties.

При измерениях координат космических источников с помощью наземных оптических и радиотелескопов наличие тропосферных неоднородностей показателя преломления приводит к возникновению случайных ошибок в измеряемых положениях источников. Если в качестве модели телескопа рассматривать двухэлементный интерферометр, то влияние тропосферы сказывается в случайных набегах фазы сигнала  $\psi$  в тропосфере по трассам к первой и второй антеннам, величина которых определяется флуктуационными свойствами тропосферы. Как известно, в качестве достаточно универсальной характеристики этих свойств удобно рассматривать структурную функцию  $D_I$  электрической толщи тропосферы [1], которая в приближении геометрической оптики элементарным образом связана со структурной функцией фазы:

$$D_\psi = \langle [\psi(t + \Delta t) - \psi(t)]^2 \rangle = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 D_I,$$

где  $\lambda$  — длина волны.

Временная структурная функция реальной тропосферы хорошо аппроксимируется функцией Кармана:

$$D_\psi(\Delta t) = 2a^2 \left\{ 1 - \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right) \right\} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \quad (1)$$

с параметрами  $a=10$  см,  $t_0=5$  час. и  $\nu=5/6$  [2]. Здесь  $\Gamma(\nu)$  — гамма-функция и  $K_\nu$  — функция Макдональда. Гипотеза «замороженной» турбулентности, которая для свободной атмосферы подтверждена экспериментально по измерениям метеопараметров до масштабов порядка километра [3], позволяет переходить от временной к пространственной структурной функции:  $D_\psi(\rho) = D_\psi(\nu \Delta t)$ , где  $\rho$  — база интерферометра и  $\nu$  — средняя скорость переноса тропосферных неоднородностей, средняя скорость ветра. Существующие для  $\nu$  оценки весьма неопределенны [4], однако,

если принять компромиссную величину  $v=10$  м/сек., которая совпадает с типичной скоростью ветра при синоптических процессах [5], то внешний масштаб турбулентности в принятой модели будет  $\rho_0=vt_0=180$  км. Заметим, что неоднородности, близкие к таким масштабам, действительно наблюдались [6].

В области масштабов, малых по сравнению с внешним масштабом турбулентности,  $\rho \ll \rho_0$  (инерционный интервал), аппроксимация Кармана (4) дает известный «закон 5/3», непосредственно вытекающий из теории турбулентности Колмогорова—Обухова [1]. При больших значениях  $\rho > \rho_0$  (энергетический интервал) функция Кармана асимптотически стремится к постоянной величине  $2a^2(2\pi/\lambda)^2$ , определяющей максимальный набег разности фаз в тропосфере. Следует отметить, что хотя в промежуточной области значений  $\rho$  приближение Кармана может и не отвечать реальным физическим процессам [7], однако оно остается удобной аппроксимацией, которая вполне пригодна для получения оценок в аналитической форме.

Структурная функция  $D_t(\rho)$  позволяет оценить тропосферную ошибку  $\Delta\theta$ , возникающую при мгновенном измерении координаты источника:  $\Delta\theta \propto \sqrt{D_t/\rho}$ . Очевидно, что эту ошибку можно уменьшить, если использовать временное накопление. Широко распространено мнение, что характер осреднения определяется лишь характерным для базы  $\rho$  периодом флуктуаций тропосферных неоднородностей  $t_p = \rho/v$ , который совпадает с временным интервалом корреляции флуктуаций показателя преломления тропосферных неоднородностей. Тогда кажется, что в течение времени  $T > t_p$  можно сделать  $N=T/t_p$  независимых отсчетов и, следовательно, уменьшить тропосферную ошибку в  $\sqrt{T/t_p}$  раз:  $\Delta\theta_T \propto \Delta\theta/\sqrt{T/t_p}$ . Однако если встать на такую точку зрения, то неизбежно следующее парадоксальное заключение: в инерционном интервале тропосферная угловая ошибка  $\Delta\theta_T$  тем меньше, чем меньше база. Действительно, при  $\rho \ll \rho_0$ ,  $\Delta\theta \propto \rho^{-1}$  ( $\Delta\theta \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 0$ ) и, таким образом,  $\Delta\theta_T \propto \rho^{-1/2}/\sqrt{Tv} \propto \rho^{1/2}/\sqrt{Tv}$ , так что  $\Delta\theta_T \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ .

В действительности, как показывает строгий анализ,  $t_p$  в общем случае не определяет интервала корреляции, который при  $\rho < \rho_0$  всегда существенно больше  $t_p$ . Зависимость же  $\Delta\theta_T$  от времени накопления  $T$  определяется взаимным соотношением времени  $t_0$ , характеризующего внешний масштаб турбулентности, и временами  $t_p$  и  $T$ , характеризующими пространственную и временную фильтрации тропосферных неоднородностей. В частности, в наиболее интересном для оптики инерционном интервале временное накопление, как будет показано ниже, эффективно ослабляет влияние тропосферы лишь при достаточно больших временах осреднения  $T > t_0$ . Тогда, как оказывается,  $\Delta\theta_T$  не зависит от базы.

В работе рассмотрен характер временного осреднения тропосферной угловой ошибки и получены аналитические оценки для следующей модели процедуры наблюдений — проводится  $N$  сеансов наблюдений длительностью  $T$  с периодом  $\mu$  ( $\mu/T \geq 1$ ). Полученные результаты развивают и обобщают результаты работы [8], в которой были изучены некоторые режимы осреднения одного наблюдения длительностью  $T$ . Несмотря на то что для анализа в качестве модели измерительного устройства рассматривается двухэлементный интерферометр, полученные результаты применимы и к инструментам с заполненными апертурами. Действительно, в случае сплошной апертуры с равномерным амплитудным распределением флуктуации положения главного лепестка, определяемые флуктуациями центра тяжести диаграммы направленности, отличаются от значения, получаемого на основе флуктуаций разности фаз на краях апертуры лишь коэффициентом порядка 1 (0.97 для круглой апертуры [1], 1—1.5 для линейной апертуры). Последнее связано с тем, что мелкомасштабные флуктуации (порядка размера апертуры и меньше) фильтруются сплошной апертурой и

практически не смещают центра тяжести изображения, а лишь ведут к его размытию.

**Спектр флуктуаций разности фаз и общие формулы для дисперсии разности фаз.** Для дальнейшего анализа удобно перейти от структурной функции (1) к связанному с ней Фурье-преобразованием спектру флуктуаций фазы:

$$W_{\psi}(\omega) = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \frac{t_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{\{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+1/2}}, \quad (2)$$

который связан со спектральной плотностью флуктуаций разности фаз  $\delta\psi = \psi_2 - \psi_1$  в двух точках, находящихся на расстоянии  $\rho$ , соотношением

$$W_{\delta\psi}(\omega) = 4 \sin^2 \frac{\beta\omega}{2\nu} W_{\psi}(\omega), \quad (3)$$

где  $\omega$  — циклическая частота. Периодический множитель в (3) характеризует пространственную фильтрацию тропосферных неоднородностей с размерами, большими базы инструмента  $\rho$ .

Временное осреднение на интервале  $T$  сводится к отфильтровыванию флуктуаций с частотами  $\omega \geq 1/T$ :

$$W_{\delta\psi}^T(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 W_{\delta\psi}(\omega). \quad (4)$$

Последнее выражение для спектральной плотности определяет дисперсию разности фаз, вызванную движением тропосферных неоднородностей для инструмента с базой  $\rho$  при единичном сеансе наблюдения длительностью  $T$ :

$$\sigma_1^2 \equiv \sigma_{\delta\psi}^2(\rho, T) = 2 \int_0^{\infty} W_{\delta\psi}^T(\omega) d\omega = A \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha\omega \sin^2 \beta\omega}{\omega^2 \{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+1/2}} d\omega, \quad (5)$$

где  $\alpha = \rho/2\nu$ ;  $\beta = T/2$  и

$$A = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{t_0}{\beta^2} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2. \quad (5a)$$

Пусть проводится  $N$  сеансов наблюдений, повторяющихся с периодом  $\mu$  с продолжительностью наблюдений в каждом сеансе  $T$  ( $\mu \geq T$ ). Сдвиг сигнала во времени на величину  $\mu$  эквивалентен умножению его спектра на величину  $e^{-i\omega\mu}$ . Следовательно, суммарная спектральная плотность при  $N$  сеансах будет иметь вид:

$$W_{\delta\psi}^{T, \mu, N}(\omega) = \frac{1}{N^2} |1 + e^{-i\omega\mu} + \dots + e^{-i(N-1)\omega\mu}|^2 W_{\delta\psi}^T(\omega). \quad (6)$$

Поскольку выражение, стоящее под знаком модуля, представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем  $e^{-i\omega\mu}$ , то, как можно показать,

$$|1 + e^{-i\omega\mu} + \dots + e^{-i(N-1)\omega\mu}|^2 = \left| \frac{1 - e^{-iN\omega\mu}}{1 - e^{-i\omega\mu}} \right|^2 = N + 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \cos(N-k)\omega\mu. \quad (7)$$

Таким образом, спектральная плотность в случае  $N$  измерений будет:

$$W_{\delta\psi}^{T, \mu, N}(\omega) = \frac{A}{N^2} \frac{\sin^2 \alpha\omega \sin^2 \beta\omega}{\omega^2 \{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+1/2}} \left( N + 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \cos(N-k)\omega\mu \right). \quad (8)$$

Интегрируя (8) по частям, приходим к следующему выражению для дисперсии разности фаз:

$$\begin{aligned}
\sigma_N^2 &\equiv \sigma_{\psi}^2(\rho, T, \mu, N) = 2 \int_0^{\infty} W_{\psi}^{T, \mu, N}(\omega) d\omega = \\
&= AN^{-1} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin 2\alpha\omega \sin^2 \beta\omega + \beta \sin 2\beta\omega \sin^2 \alpha\omega}{\omega \{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+1/2}} d\omega - \right. \\
&\quad \left. - (2\nu + 1) t_0^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha\omega \sin^2 \beta\omega}{\{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+3/2}} d\omega \right\} + \\
&\quad + 2AN^{-2} \sum_{k=0}^{N-1} k \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin 2\alpha\omega \sin^2 \beta\omega + \beta \sin 2\beta\omega \sin^2 \alpha\omega}{\omega \{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+1/2}} \times \right. \\
&\quad \times \cos(N-k)\mu\omega d\omega - (2\nu + 1) t_0^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha\omega \sin^2 \beta\omega}{\{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+3/2}} \cos(N-k)\mu\omega d\omega - \\
&\quad \left. - (N-k)\mu \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha\omega \sin^2 \beta\omega \sin(N-k)\mu\omega}{\omega \{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+1/2}} d\omega \right\} \equiv (I_1 + I_2) + (J_1 + J_2 + J_3). \quad (9)
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что сумма интегралов  $\sigma_I^2 = I_1 + I_2 = \sigma_I^2/N$ . Если бы  $J_1 + J_2 + J_3 = 0$ , то отдельные сеансы осреднялись как статистически независимые. Следовательно, группа членов, связанных с интегралами  $J_1, J_2, J_3$ , характеризует влияние корреляционных связей между индивидуальными сеансами.

Используя простые тригонометрические соотношения, интегралы  $I_1, J_1$  и  $J_3$  можно свести к сумме интегралов вида

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{\sin \gamma\omega d\omega}{\omega \{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+1/2}} = \frac{\gamma}{2t_0} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left\{ \Gamma(\nu)_1 F_2\left(\frac{1}{2}; 1 - \nu, \frac{3}{2}; \left(\frac{\gamma}{2t_0}\right)^2\right) - \right. \\
&\left. - \frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu(2\nu+1)} \left(\frac{\gamma}{2t_0}\right)^2 {}_1F_2\left(\nu + \frac{1}{2}; \nu + \frac{3}{2}; \nu + 1; \left(\frac{\gamma}{2t_0}\right)^2\right) \right\} \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \frac{2t_0}{\gamma} Y_{\nu}\left(\frac{\gamma}{2t_0}\right), \quad (10a)
\end{aligned}$$

где  ${}_1F_2(a, b, c, z) |z| > 0$  — обобщенный гипергеометрический ряд, а интегралы  $I_2$  и  $J_2$  — к сумме интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \gamma\omega d\omega}{\{1 + (\omega t_0)^2\}^{\nu+3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + \frac{3}{2})} \times \begin{cases} 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1), & \gamma = 0 \\ \left(\frac{\gamma}{t_0}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{\gamma}{t_0}\right), & \gamma \neq 0 \end{cases} \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + \frac{3}{2}) t_0} X_{\nu+1}\left(\frac{\gamma}{t_0}\right), \quad (10b)$$

представляющих собой интегральное представление Бассета для функции Макдональда [9].

Тогда, принимая во внимание интегральные выражения (10), имеем:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} AN^{-1} t_0 \left\{ Y_{\nu}\left(\frac{\alpha}{t_0}\right) + Y_{\nu}\left(\frac{\beta}{t_0}\right) - \frac{1}{2} Y_{\nu}\left|\frac{\alpha \pm \beta}{t_0}\right| \right\}; \\
J_1 + J_3 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} AN^{-2} t_0 \sum_{k=0}^{N-1} k \left\{ Y_{\nu}\left|\frac{2\alpha \pm (N-k)\mu}{2t_0}\right| + Y_{\nu}\left|\frac{2\beta \pm (N-k)\mu}{2t_0}\right| - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} Y_{\nu}\left|\frac{2\alpha \pm 2\beta + (N-k)\mu}{2t_0}\right| - \frac{1}{2} Y_{\nu}\left|\frac{2\alpha \pm 2\beta - (N-k)\mu}{2t_0}\right| - 2Y_{\nu}\left|\frac{(N-k)\mu}{2t_0}\right| \right\}; \\
I_2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+2} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} AN^{-1} t_0 \left\{ 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) - X_{\nu+1}\left(\frac{2\alpha}{t_0}\right) - X_{\nu+1}\left(\frac{2\beta}{t_0}\right) + \frac{1}{2} X_{\nu+1}\left|\frac{2\alpha \pm 2\beta}{t_0}\right| \right\};
\end{aligned}$$



$$J_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} AN^{-2}t_0 \sum_{k=0}^{N-1} k \left\{ X_{\nu+1}\left(\frac{(N-k)\mu}{t_0}\right) - \frac{1}{2} X_{\nu+1}\left|\frac{2\alpha \pm (N-k)\mu}{t_0}\right| - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} X_{\nu+1}\left|\frac{2\beta \pm (N-k)\mu}{t_0}\right| + \frac{1}{4} X_{\nu+1}\left|\frac{2\alpha + 2\beta \pm (N-k)\mu}{t_0}\right| + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} X_{\nu+1}\left|\frac{2\alpha - 2\beta \pm (N-k)\mu}{t_0}\right| \right\}. \quad (11)$$

Здесь и далее  $(\pm)$  означает суммирование по соответствующим двум членам:  $f(x \pm y) = f(x+y) + f(x-y)$ . Обратим внимание на тот очевидный факт, что при  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $J_1 + J_2 + J_3 \rightarrow 0$ ; корреляция между индивидуальными сеансами отсутствует и, как следствие,  $\sigma_N = \sigma_I/\sqrt{N}$ .

Весьма громоздкое выражение для дисперсии флуктуаций разности фаз (11), обусловленной движением тропосферных неоднородностей, становится доступным для простого анализа в большинстве наиболее важных для наблюдательной астрономии случаях.

**Асимптотические выражения для дисперсии разности фаз.** Характер осреднения  $\sigma_N$  зависит от соотношения пяти временных параметров:  $t_0$ ,  $t_p = \rho/\nu = 2\alpha$ ,  $T = 2\beta$  и общего времени наблюдения  $T_{\text{эф}} = (N-1)\mu + T$ .

А. Малые  $t_p$ ,  $T_{\text{эф}}$ . Пусть все характерные временные параметры  $t_p$ ,  $T_{\text{эф}}$ , а следовательно, и  $T$ ,  $\mu$  малы по сравнению с временным масштабом  $t_0$ , определяемым внешним масштабом турбулентности. Другими словами, рассмотрим случай малых баз ( $\rho < 100$  км) и малых времен накопления ( $T < 1$  час.).

Поскольку функции  $Y_\nu(z)$  и  $X_{\nu+1}(z)$  ( $\nu > 0$ ) имеют следующие асимптотические выражения при малых  $z \ll 1$ :

$$Y_\nu(z) \approx z^2 \left\{ \Gamma(\nu) - \frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu(2\nu+1)} z^2 \right\}; \quad (12) \\ X_{\nu+1}(z) \approx \frac{\pi}{2 \sin \pi\nu} \left\{ \frac{z^{2\nu+2}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)} - \frac{z^2}{\Gamma(-\nu)} - \frac{z^2}{2^{1-\nu}\Gamma(1-\nu)} \right\},$$

то после некоторых преобразований получаем для (11):

$$I_1 = -\frac{\nu+1}{\nu+2} J_2 = -\frac{4}{2\nu+1} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 N^{-1} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{T}{2t_0}\right)^{2\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left| 1 \pm \frac{\rho}{\nu T} \right|^{2\nu+2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\rho}{\nu T}\right)^{2\nu+2} - 1 \right\}; \\ J_1 + J_3 = -\frac{\nu+1}{\nu+2} J_2 = -\frac{4}{2\nu+1} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 N^{-2} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{2t_0}{T}\right)^2 \times \quad (13) \\ \times \sum_{k=0}^{N-1} k \left(\frac{(N-k)\mu}{2t_0}\right)^{2\nu+2} \left\{ 2 + \frac{1}{2} \left| 1 \pm \frac{\rho + T_\nu}{(N-k)\mu\nu} \right|^{2\nu+2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left| 1 \pm \frac{\rho - T_\nu}{(N-k)\mu\nu} \right|^{2\nu+2} - \left| 1 \pm \frac{\rho}{(N-k)\mu\nu} \right|^{2\nu+2} - \left| 1 \pm \frac{T_\nu}{(N-k)\mu\nu} \right|^{2\nu+2} \right\}.$$

Отметим, что выражение  $\sigma_N^2 = \frac{1}{2(\nu+1)} (I_1 + J_1 + J_3)$ , определяемое (13), при  $\mu \rightarrow \infty$  и  $N=1$  совпадает с аналогичным выражением, полученным другим способом в работе [4]. Обратим также внимание на то, что  $(J_1 + J_3)|_{\mu=T} + I_1(T) = NI_1(NT)$ , как и должно быть, поскольку при  $\mu = T$ ,  $T_{\text{эф}} = NT$ .

В рассматриваемом приближении для членов, характеризующих корреляционные связи между отдельными сеансами,  $\sigma_j^2 = J_1 + J_2 + J_3$ , выполняется жесткое неравенство

$$4(2\nu - 1) \frac{\Gamma(1 - \nu)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{N^2} \left( \frac{(N-k)\mu}{2t_0} \right)^{2\nu} \left( \frac{\rho}{(N-k)\mu\nu} \right)^2 \leq \sigma_J^2 \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 \leq 2 \frac{\Gamma(1 - \nu)}{\Gamma(1 + \nu)} \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \left( \frac{\rho}{2\nu t_0} \right)^{2\nu}. \quad (14)$$

Правая часть этого неравенства соответствует условию  $T_{эф} < t_p$ , когда влияние корреляционных членов при данных  $\rho$ ,  $T_{эф}$  и  $\mu$  минимально. Левая часть неравенства выполняется при  $\mu \gg T$ ,  $t_p$ , когда при данных  $\rho$  и  $T$  влияние корреляционных связей между отдельными сеансами минимально, и может служить хорошей аппроксимацией точного выражения для  $\sigma_J^2$  уже

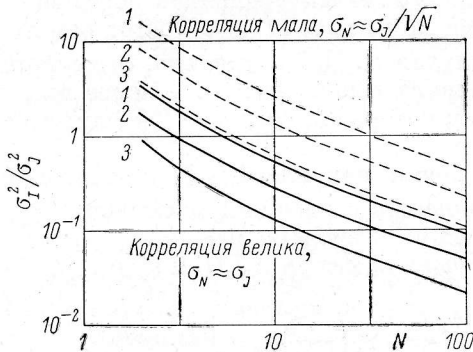


Рис. 1. Зависимость  $\sigma_I^2/\sigma_J^2$  от числа сеансов  $N$  при  $T=0.1$  сек.

Пунктирные линии —  $\rho/T=10$ , сплошные —  $\rho/T=1000$ ; 1 —  $\beta=1$ ; 2 — 10; 3 — 100 м.

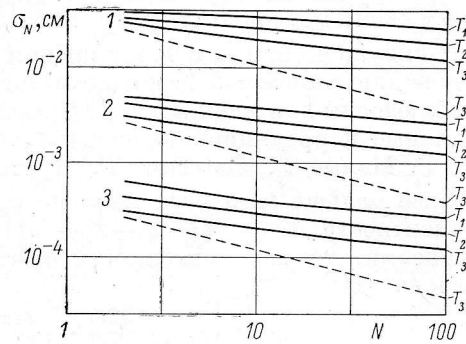


Рис. 2. Зависимости  $\sigma_N$  от числа наблюдений  $N$  при  $\mu/T=10$ .

1 —  $\beta=100$ ; 2 — 10; 3 — 1 м;  $T_1=0.1$ ;  $T_2=1$ ;  $T_3=10$  сек.; пунктирные линии —  $\sigma_I/\sqrt{N}$ .

при  $\mu > 5T$ ,  $5t_p$ . Отметим также, что имеет место удобная для дальнейших вычислений оценка:

$$4(2\nu - 1) \frac{\Gamma(1 - \nu)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{N^2} \left( \frac{(N-k)\mu}{2t_0} \right)^{2\nu} \left( \frac{\rho}{(N-k)\mu\nu} \right)^2 \leq 2\nu(2\nu - 1) \frac{\Gamma(1 - \nu)}{\Gamma(1 + \nu)} \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \left( \frac{\mu}{2t_0} \right)^{2\nu} \left( \frac{\rho}{\mu T} \right)^2. \quad (14a)$$

Согласно (14), влияние корреляционных членов оказывается существенным даже при значительных отношениях  $\mu/T$  и  $\mu/t_p$  (рис. 1). Действительно,  $\sigma_J^2$  слабо зависит от  $N$ , и поэтому простое накопление числа сеансов  $N$  при заданных  $T_{эф}$  и  $\rho$  не ведет к существенному уменьшению тропосферной ошибки  $\sigma_N^2$  (рис. 2). Последнее фактически означает, что в случае, когда все характерные временные параметры меньше  $t_0$ , влияние временного накопления малоощутимо.

Б. Малые  $\mu$  и  $t_p$ , большие  $T_{эф}$ . Этот режим отличается от рассмотренного выше тем, что при достаточно большом числе сеансов  $N$  общее время наблюдений  $T_{эф}$  может стать больше характерного времени  $t_0$ . В этом случае, как следует из (11), суммирование в выражении (13) для  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  должно распространяться лишь до  $k=N^*-1$ , где  $N^*$  — целая часть отношения  $t_0/\mu$ . Следовательно, в этом случае, если  $\mu > T$ ,  $t_p$ ,

$$\sigma_J^2 \approx \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 2\nu(2\nu - 1) \frac{(N^* - 1) N^*}{N^2} \left( \frac{\mu}{2t_0} \right)^{2\nu} \left( \frac{\rho}{\mu\nu} \right)^2.$$

Очевидно, что в этом режиме увеличение числа сеансов может вести к значительному уменьшению  $\sigma_N^2$ .

В. Малые  $T$  и  $t_p$ , большие  $T_{эф}$ . \* Пусть база  $\rho$  мала по сравнению с внешним масштабом турбулентности  $\rho_0$ , а время накопления  $T$  в отдельном сеансе меньше характерного для тропосферы времени  $t_0$ . Если интервал между отдельными сеансами  $\mu > t_0$ , то, как нетрудно видеть из (11),  $\sigma_j^2 = 0$ , так что сеансы оказываются статистически независимыми, причем, согласно (12) и (13),

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma_1^2}{N} = \frac{2}{N} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \begin{cases} \left(\frac{\rho}{2\nu t_0}\right)^{2\nu}, & T < t_p; \\ \left(\frac{\rho}{\nu T}\right)^2 \left(\frac{T}{2t_0}\right)^{2\nu}, & T > t_p. \end{cases} \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что внутри отдельного сеанса временное осреднение идет очень медленно ( $T > t_p$ ), либо вообще не идет ( $T < t_p$ ). Этот результат вполне естествен с точки зрения случая А. Действительно, отдельный сеанс длительностью  $T$  можно рассматривать как сумму большого числа наблюдений длительностью  $T/N$ , между которыми, согласно (14), имеются сильные корреляционные связи.

Г. Малые  $t_p$ , большие  $T$ . Пусть время накопления  $T$  в отдельном сеансе больше  $t_0$ , а база мала по сравнению с внешним масштабом турбулентности. Если  $\Delta T = \mu - T$  — промежуток времени между отдельными сеансами, то вне зависимости от отношения между  $\Delta T$ ,  $T$  и  $t_p$  имеем, согласно (11),

$$I_1 = \frac{16 N^{-1}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{t_0}{T}\right)^2 Y_\nu\left(\frac{\rho}{2\nu t_0}\right);$$

$$I_2 = \frac{8 N^{-1}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{t_0}{T}\right)^2 \left\{ X_{\nu+1}\left(\frac{\rho}{\nu t_0}\right) - 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \right\}; \quad (16a)$$

$$J_1 + J_3 = \frac{16}{\Gamma(\nu)} \frac{N-1}{N^2} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{t_0}{T}\right)^2 \left\{ Y_\nu\left(\frac{\Delta T}{2t_0}\right) - \frac{1}{2} Y_\nu\left|\frac{\Delta T \pm \rho/\nu}{2t_0}\right| \right\}; \quad (16b)$$

$$J_2 = \frac{2^{3-\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{N-1}{N^2} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{t_0}{T}\right)^2 \left\{ X_{\nu+1}\left(\frac{\Delta T}{t_0}\right) - \frac{1}{2} X_{\nu+1}\left|\frac{\Delta T \pm \rho/\nu}{t_0}\right| \right\}.$$

В том случае, когда промежуток времени между отдельными сеансами  $\Delta T > t_0$ ,  $\sigma_j^2 = 0$  и отдельные сеансы становятся статистически независимыми, что вполне естественно, поскольку характерное время  $t_0$  определяет естественный масштаб корреляции тропосферных неоднородностей. Поскольку  $t_p < t_0$ , то, принимая во внимание (12), имеем, согласно (16a):

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma_1^2}{N} = \frac{2}{N} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\rho}{\nu T}\right)^2. \quad (17)$$

Если промежуток времени между сеансами  $\Delta T < t_0$ , то из (12) и (16):

$$\sigma_N^2 = 2 \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\rho}{\nu T N}\right)^2 \left(1 + \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} (N-1) \left(\frac{\Delta T}{2t_0}\right)^{2\nu}\right). \quad (18)$$

Таким образом, при  $T > t_0$  эффект временного осреднения тропосферного набега разности фаз становится весьма ощутимым, а зависимость  $\sigma_N$  от времени накопления  $T$  оказывается универсальной и не зависит от значения показателя  $\nu$ .

Д. Большие  $t_p$  и малые  $T$ . Пусть размер базы  $\rho$  больше внешнего масштаба турбулентности  $\rho_0$ , что имеет место при наблюдениях на радиointерферометрах со сверхдлинными базами (РСДБ). Для РСДБ время накопления ограничено нестабильностью стандартов времени и частоты и всегда меньше  $t_0$ .

\* Случай Б является переходным от случая А к случаю В, поскольку при  $\mu > t_0$ ,  $N^* = 1$  и  $\sigma_j^2 = 0$ , а при  $T_{эф} < t_0$ ,  $N^* \approx N$ .



Если в рассматриваемом приближении  $T_{эф} < t_0$ , то, согласно (11) и (12):

$$I_1 = -2I_2 = \frac{J_1 + J_3}{N-1} = -\frac{2J_2}{N-1} = 4N^{-1} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2,$$

и, таким образом, отдельные сеансы оказываются максимально скоррелированными, так что

$$\sigma_N^2 = \sigma_1^2 = 2 \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2. \quad (19)$$

Очевидно, что (19) является прямым следствием (1) при  $\rho > \rho_0$  и представляет собой максимально возможный набег разности фаз в тропосфере.

Если же при малом времени накопления  $T < t_0$  период между сеансами  $\mu$  превышает характерный масштаб  $t_0$ , то вне зависимости от соотношения между  $t_p$  и  $\mu$  отдельные сеансы становятся статистически независимыми,  $\sigma_j^2 = 0$  и

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma_1^2}{N} = \frac{2}{N} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2.$$

В обоих случаях, как и следовало ожидать, тропосферный набег разности фаз не зависит ни от длительности сеанса, ни от базы.

**Тропосферные ограничения при координатных измерениях.** Тропосферный набег разности фаз  $\sigma_N$ , выражения для которого были получены выше, приводит к среднеквадратичной ошибке в измерении углового положения источника  $\Delta\theta_N = \sigma_N / \frac{2\pi}{\lambda} \rho$  (радиан)  $= 2 \cdot 10^5 \sigma_N / \frac{2\pi}{\lambda} \rho$  (сек. дуги).

Характер зависимости  $\Delta\theta_N$  от базы и времени осреднения  $T_{эф}$  определяется совместным действием двух эффектов — пространственной (параметр  $t_p$ ) и временной (параметры  $T$ ,  $\mu$  и  $T_{эф}$ ) фильтраций. Непосредственно из выражения для спектральной плотности (8) видно, что эффективность обоих эффектов главным образом зависит от соотношения  $t_p$ ,  $T$ ,  $\mu$  и характерного для тропосферы временного параметра  $t_0$ . Пространственное и временное осреднение  $\Delta\theta_N$  становится достаточно существенным лишь в тех случаях, когда соответствующий временной параметр больше  $t_0$ . Последнее означает, что основной вклад в тропосферную ошибку при измерении углового положения источника вносят крупномасштабные (низкочастотные) тропосферные неоднородности. Уменьшить их влияние можно лишь на больших по сравнению с внешним масштабом турбулентности базах либо при больших по сравнению с  $t_0$  временах осреднения  $T$ .

1. Малые по сравнению с внешним масштабом турбулентности базы  $\rho < \rho_0$  ( $t_p < t_0$ ). В этом случае в соответствии со сделанными выше замечаниями уменьшение тропосферной ошибки может быть достигнуто лишь за счет увеличения времени накопления в отдельном сеансе или периода между сеансами  $\mu$ , поскольку эффект пространственной фильтрации в этом режиме оказывается малоощутимым.

а) Время накопления в сеансе  $T < t_0$ . Если период между сеансами  $\mu > t_0$ , то наблюдения в отдельных сеансах оказываются статистически независимыми и  $\Delta\theta_N = \Delta\theta_1 / \sqrt{N}$ , где, согласно (15), асимптотические выражения для  $\Delta\theta_1$  будут:

$$\Delta\theta_1 = \begin{cases} 3.75/\rho^{1/6}, & \text{если } T \ll t_p; \\ 1.71/T^{1/6}, & \text{если } T \gg t_p, \end{cases} \quad (20)$$

где  $\rho$  измеряется в сантиметрах, а  $T$  в секундах. Точные зависимости  $\Delta\theta_1$  от  $\rho$  и  $T$  представлены на рис. 3, 4. Здесь же пунктирными линиями показаны результаты вычислений в предположении, что  $t_p$  определяет интервал корреляции между мгновенными измерениями, а  $\sqrt{T/t_p}$  — число независимых отсчетов в течение времени  $T$ . Нетрудно видеть, что такая



точка зрения верна лишь в тривиальном случае  $T \ll t_p$ , а при  $T \gg t_p$  приводит к оценкам, на порядки отличающимся от действительности.

Режим  $T < t_p$ , который соответствует мгновенному для данной базы отсчету, реализуется на практике крайне редко (в радиоастрономии — на больших антеннах и для ярких источников), поскольку время накоп-

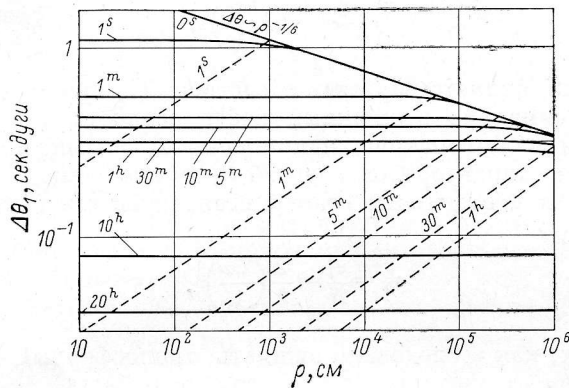


Рис. 3. Зависимость угловой ошибки единичного измерения  $\Delta\theta_1$  длительностью  $T$  от базы  $\beta$  при  $t_p < t_0$ .

ления  $T$  определяется не только флуктуационными свойствами тропосферы, но и шумовыми свойствами регистрирующей аппаратуры. Как правило, отношение сигнала к шуму становится значительным лишь при  $T \rightarrow t_p$ , и в этом случае тропосферная ошибка (20) не зависит от базы и медленно уменьшается с ростом  $T$  [8].

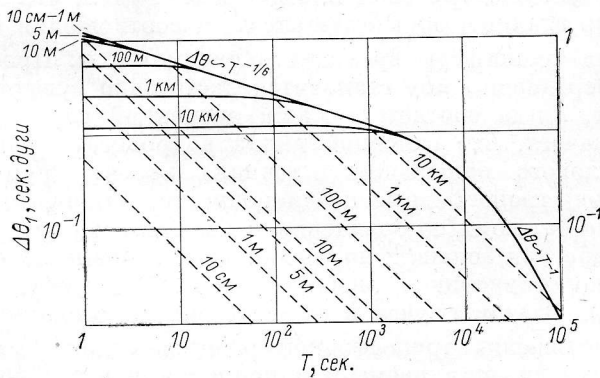


Рис. 4. Зависимость угловой ошибки единичного измерения  $\Delta\theta_1$  на базе  $\rho$  от времени накопления  $T$  при  $t_p < t_0$ .

Если период между сеансами  $\mu < t_0$ , то, как уже отмечалось, отдельные сеансы не являются статистически независимыми, в связи с чем осреднение  $\Delta\theta_N$  идет в общем случае медленнее закона  $1/\sqrt{N}$ . Согласно (14) и (14а), асимптотические выражения для угловой тропосферной ошибки имеют вид:

$$\Delta\theta_N = \begin{cases} \frac{1.71}{\sqrt{N}} T^{-1/6} \sqrt{1 + 0.6 \frac{N^*(N^* - 1)}{N} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/3}}, & \text{если } \mu \gg T \gg t_p; \\ \frac{3.75}{\sqrt{N}} \rho^{-1/6} \sqrt{1 + 0.06 \frac{N^*(N^* - 1)}{N} \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{1/3}}, & \text{если } \mu \gg t_p \gg T, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\rho$  измеряется в сантиметрах, а  $\mu$  и  $T$  в секундах.

На рис. 5 приведены точные зависимости  $\Delta\theta_N$  от периода между сеансами для двух режимов (21). Оценки для других случаев можно получить, используя рис. 1—3.

Нетрудно видеть, что закон осреднения (21) совпадает с законом осреднения статистически независимых сеансов лишь при значительных отношениях  $\mu/T$ ,  $\mu/\rho$  или  $N/N^*$ . Заметим, что при  $T_{эф} < t_0$  ( $N^* = N$ ) и заданных  $\rho$ ,  $T$  и  $\mu$  всегда можно указать такое значение  $N$ , начиная с которого увеличение числа сеансов не ведет к заметному уменьшению тропосферной ошибки, и зависимость ее в этом случае от  $\mu$  носит универсальный характер:  $\Delta\theta_N \approx 0.86/\mu^{1/6}$ .

Наконец, совершенно очевидным следствием (14) и (15) является отсутствие эффекта временного осреднения при  $T_{эф} < t_p$  —  $\Delta\theta_N = 3''.5/\rho^{1/6}$ .

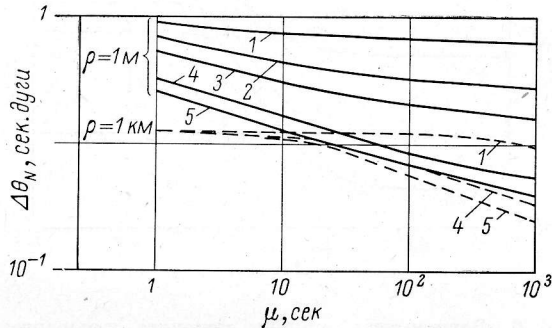


Рис. 5. Зависимость угловой ошибки  $\Delta\theta_N$  от периода между сеансами при  $T = 1$  сек.  
1 —  $N = 2$ ; 2 — 5; 3 — 10; 4 — 50; 5 — 100.

б) Время накопления в сеансе  $T > t_0$ . В режиме, когда время накопления  $T$  больше характерного времени  $t_0$ , происходит временное осреднение крупномасштабных тропосферных неоднородностей (с частотами  $\omega \geq 1/t_0$ ), которые, как уже отмечалось, вносят основной вклад в ошибку измерения углового положения источника. Если промежуток времени между сеансами  $\Delta T = \mu - T < t_0$ , то, согласно (18), осреднение тропосферной ошибки идет весьма интенсивно:

$$\Delta\theta_N = \frac{2.8 \cdot 10^3}{NT} \sqrt{1 + 1.5(N-1)10^{-7}(\Delta T)^{5/3}}, \quad (22)$$

причем тем более эффективно, чем меньше  $\Delta T$  (рис. 6). Последнее вполне очевидно, поскольку наиболее благоприятной для уменьшения тропосферной ошибки ситуацией является случай непрерывных измерений  $\Delta T = 0$  ( $T_{эф} = NT$ ).

Если  $\Delta T > t_0$ , то отдельные сеансы становятся статистически независимыми и, согласно (19),

$$\Delta\theta_N = 2.8 \cdot 10^3 / \sqrt{N} T. \quad (23)$$

В обоих рассмотренных случаях тропосферная ошибка не зависит от базы  $\rho$ .

В заключение отметим, что даже при очень большом общем времени наблюдения, согласно (22), (23), трудно получить точность лучше 0.05 сек. дуги (рис. 3, 4, 6).

2. Большие по сравнению с внешним масштабом турбулентности базы  $\rho > \rho_0$  ( $t_p > t_0$ ). В этом случае, который характерен для измерений на РСДБ,  $T \ll t_0$  и временное осреднение внутри сеанса отсутствует, так что

$$\Delta\theta_1 = 2.8 \cdot 10^6 / \rho, \quad (24)$$

где  $\rho$  измеряется в сантиметрах. Уменьшение тропосферной ошибки идет только за счет насыщения  $\sigma_{\delta\psi}$  в энергетическом интервале — эффекта, который в некотором смысле «просветляет» тропосферу. Несмотря на отсутствие временного осреднения с помощью РСДБ на базах порядка несколько тысяч километров влияние тропосферных эффектов можно ограничить, как это хорошо известно, тысячными долями секунды дуги в единичном измерении. Согласно (20), РСДБ-наблюдения могут считаться статистически независимыми лишь при  $\mu \gg t_0$ , когда  $\Delta\theta_N = \Delta\theta_1/\sqrt{N}$ .

**Заключение.** Приведенные оценки показывают, что флуктуационные эффекты тропосферы сильно ограничивают точность координатных изме-

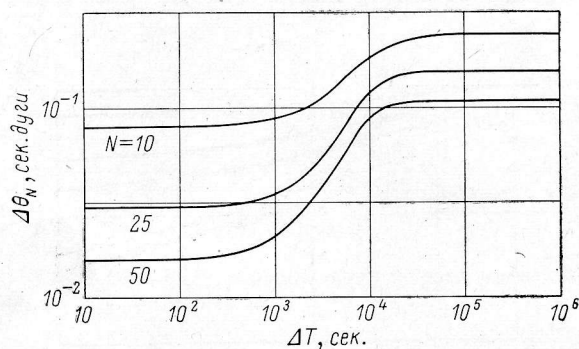


Рис. 6. Зависимость ошибки углового измерения  $\Delta\theta_N$  от промежутка времени между сеансами  $\Delta T$  при  $T=10$  час.

рений даже при больших временах накопления ( $T > t_0$ ). В наибольшей степени это заключение верно для измерений, проводимых на малых базах ( $\rho < \rho_0$ ), которые типичны для оптической астрономии. Здесь тропосфера ограничивает точность измерений координат сотыми долями секунды дуги даже при экспозициях в несколько часов.

Использование методов дифференциальной астрономии или метода опорного объекта может существенно ослабить влияние тропосферы. Однако это утверждение верно лишь для очень малых угловых расстояний  $\varphi$  между наблюдаемым и опорным объектами:  $\rho_{\text{эф}} = \varphi h_{\text{эф}} \ll \rho$ , где  $h_{\text{эф}} \approx 10$  км — эффективная высота тропосферы;  $\rho$  — диаметр телескопа, база интерферометра. В этом случае набег фазы определяется эффективной базой  $\rho_{\text{эф}}$ , и, таким образом, угловая ошибка будет уменьшаться с уменьшением  $\varphi$ . В связи с этим замечанием все полученные в работе оценки вполне применимы как при абсолютных, так и при дифференциальных измерениях в оптической и радиоастрономии.

#### Список литературы

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967. 549 с.
2. Стоцкий А. А. О флуктуационных характеристиках тропосферы Земли. — Радиофизика, 1973, 16, № 5, с. 806—809.
3. Гурвич А. С., Копров Б. М., Цванг Л. Р., Яглом А. М. Эмпирические данные о мелкомасштабной структуре атмосферной турбулентности. — В кн.: Атмосферная турбулентность и распределение радиоволн. М., «Наука», 1967, с. 30—62.

4. Арманд Н. А., Ломакин А. К., Саркисянц В. А. О влиянии случайных неоднородностей тропосферы на работу больших антенн и интерферометров. — Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 11, с. 11—20.
  5. Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики. М., «Наука», 1969. 184 с.
  6. Стоцкий А. А. Крупномасштабные флуктуации фазы при распространении радиоволн в турбулентной атмосфере. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 8, с. 1579—1584.
  7. Стоцкий А. А. Флуктуационные характеристики электрической толщи тропосферы. — Радиотехника и электроника, 1972, 17, № 11, с. 2277—2284.
  8. Арманд Н. А. Влияние времени наблюдения на разрешающую способность интерферометров, ограничиваемую флуктуациями фаз радиоволн. — Радиотехника и электроника, 1969, 14, № 7, с. 1157—1164.
  9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1966.
-